金井清先生が書かれた「地震工学」[a)]の誤植について

1. 誤植の指摘

「地震工学」（以下，断らずに教科書とも呼ぶ）の p.8 では，「2.3　地震計の原理」として，地震計の運動方程式を式(2.10)のように立て，式(2.12)の条件のもとの地震計の記録　x　として式(2.13)を示している．

$$\frac{d^2x}{dt^2}+2\epsilon\frac{dx}{dt}+n^2x=-\frac{d^2y}{dt^2} \tag{2.10}$$

$$\begin{aligned} &t<0: y=0 \\ &t>0: y=y_0\sin pt \end{aligned} \tag{2.12}$$

ここで，　y　は地震動である．

$$\begin{aligned} &t<0: x=0 \\ &t>0: x=\frac{y_0p^2}{\sqrt{(n^2-p^2)^2+4\varepsilon^2p^2}}\sin\Bigg\{pt-\tan^{-1}\Bigg(\frac{2\varepsilon p}{n^2-p^2}\Bigg)\Bigg\} \\ &\qquad -\frac{y_0p^2e^{-\varepsilon t}}{\sqrt{(n^2-\varepsilon^2)\{(n^2-p^2)^2+4\varepsilon^2p^2\}}}\sin\Bigg\{\sqrt{n^2-\varepsilon^2}\,t-\tan^{-1}\Bigg(\frac{2\varepsilon\sqrt{n^2-\varepsilon^2}}{2\varepsilon^2-n^2}\Bigg) \\ &\qquad\qquad +\tan^{-1}\Bigg\{\frac{2\varepsilon\sqrt{n^2-\varepsilon^2}}{2\varepsilon^2-n^2-p^2}\Bigg)\Bigg\} \qquad (2.13) \end{aligned} \tag{2.13}$$

この式では，　$t>0$　の場合の第 2 項の sin の引数の括弧が対応しておらず，引数の範囲がどこまでだか分からない[b)]．

この式については参考文献として金井先生が地震研究所彙報に書かれたものが示されている[c)]．現在は，東京大学地震研究所のホームページから東京大学学術機関リポジトリに入り，この文献を読むことができる．しかしながら，原論文では記号が違うので，記号を直す必要がある．また，定式化に使われていない記号が使われているという単純な誤植（原論文中の　a　は　b　の誤り）に加えて，第 2 項の振幅および位相角が教科書と原論文で対応しないという問題点がある．

---

a)　金井清：地震工学，大学講座土木工学 18，共立出版社，1969．

b)　この式は，「地震工学」の英訳本である，”Engineering Seismology” University of Tokyo Press でも同じように掲載されている．

c)　この教科書には，参考文献はページ番号しか書かれていない．そこで，念のため論文のタイトル等を記しておく．”On the Initial Movement of a Sesimograph subjected to an Arbitary Earthquake Motion, Solved with Operational Calculus I”．地震研究所彙報，19，162～176，1941．教科書に記載されている”167”という数字は，162 ページから 176 ページの論文のうち，167 ページに話題の内容が記載されている，との意味のようである．

2. 正解の確認

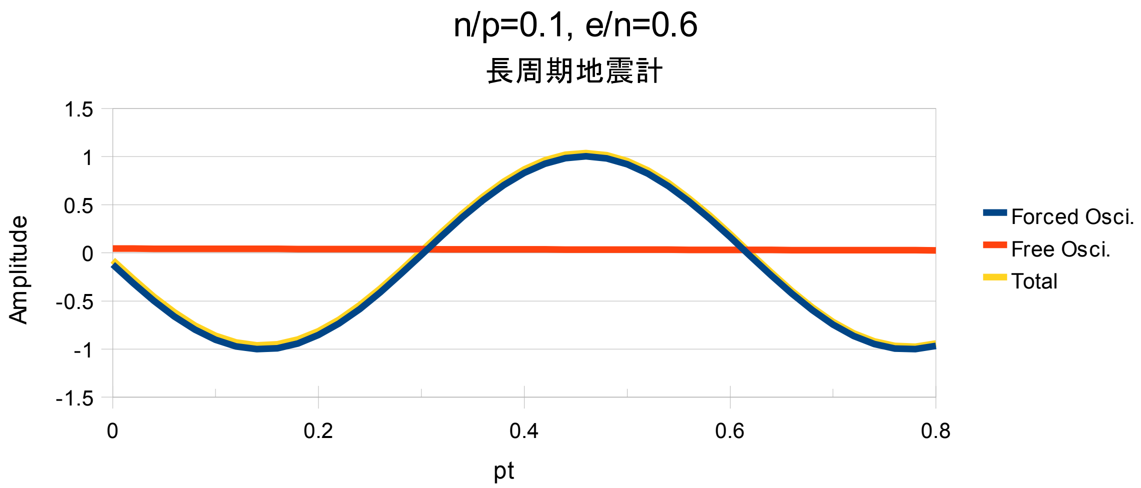
後述するように，微分方程式から解を得ることはできるが，教科書の式に変形するには手間がかかりすぎる．そこで，教科書と用いている記号が異なる原論文の式を変形し，教科書の図との対比を行った．その結果，第 2 項の振幅と sin の引数のうち第 2 番目の位相角が正しくなく，また第 2 項の sin の引数の括弧は単純に対応していないだけであることが分かった．

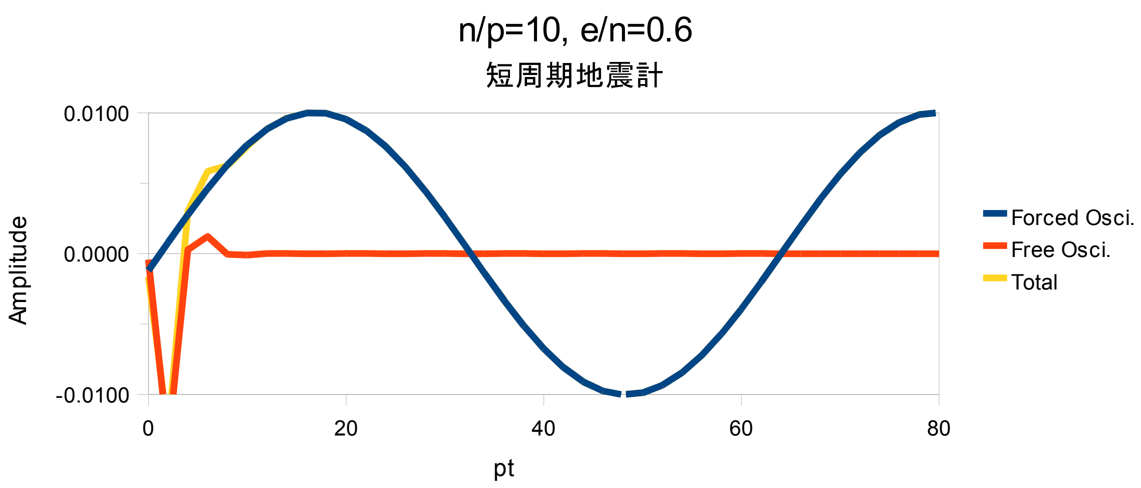
正解は次のようになる．

$$t>0: x=\frac{y_0 p^2}{\sqrt{(n^2-p^2)^2+4\varepsilon^2 p^2}}\sin\left\{pt-\tan^{-1}\left(\frac{2\varepsilon p}{n^2-p^2}\right)\right\}$$

$$-\frac{y_0 n^2 p e^{-\varepsilon t}}{\sqrt{(n^2-\varepsilon^2)\{(n^2-p^2)^2+4\varepsilon^2 p^2\}}}\sin\left\{\sqrt{n^2-\varepsilon^2}\,t-\tan^{-1}\left(\frac{2\varepsilon\sqrt{n^2-\varepsilon^2}}{2\varepsilon^2-n^2}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{2\varepsilon\sqrt{n^2-\varepsilon^2}}{2\varepsilon^2-n^2+p^2}\right)\right\}$$

念のため教科書の図 2.5，図 2.6 と同じパラメータで計算した結果が次の図である．





３．正解の導出

この問題は，金井先生が原論文に指摘しているように，多くの人が解いている．ここでは，坪井の「振動論」1)に倣い正解を求める．

１自由度系の微分方程式を教科書のようにすると，正弦波状の外力を受ける１自由度系の応答は一般に次式で表される．

$$x = C_1 e^{-\varepsilon t}\cos\sqrt{n^2-\varepsilon^2}\,t + C_2 e^{-\varepsilon t}\sin\sqrt{n^2-\varepsilon^2}\,t + A\sin(pt-\alpha) \tag{3.1}$$

ここで，$A,\ \alpha$ は強制振動（あるいは定常振動）の解であり，１自由度系の特性と外力の振動数から定めることができる．一方，$C_{1,}\ C_2$ は過渡応答の解であり初期条件から定めることができる．

ここでは，強制外力は式(2.12)より $-y_0 p^2 \sin pt$ であるので，定常解である式(3.1)の第 3 項の $A,\ \alpha$ は次のようになる．

$$A = \frac{y_0 p^2}{\sqrt{\left(n^2-p^2\right)^2 + \left(2\varepsilon p\right)^2}} \tag{3.2}$$

$$\tan\alpha = \frac{2\varepsilon p}{n^2-p^2} \tag{3.3}$$

ついで，過渡応答あるいは自由振動を表す第 1 項と第 2 項であるが，今の場合，$t=0$ の瞬間の地動変位は 0，地動速度は $y_0 p$ であるので，１自由度系から見ると初変位は 0，初速度は $-y_0 p$ である．式(3.1)およびそれを時間で微分したものに $t=0$ を代入して，初期条件を与える．

$$x(t=0) = C_1 e^0\cos\sqrt{n^2-\varepsilon^2}\cdot 0 + C_2 e^0 \sin\sqrt{n^2-\varepsilon^2}\cdot 0 + A\sin(p\cdot 0-\alpha) = 0$$

$$C_1 + A\sin(-\alpha) = 0 \tag{a}$$

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} =\ & \\ & C_1 e^{-\varepsilon t}\left\{-\varepsilon\cos\sqrt{n^2-\varepsilon^2}\,t - \sqrt{n^2-\varepsilon^2}\sin\sqrt{n^2-\varepsilon^2}\,t\right\} \\ & + C_2 e^{-\varepsilon t}\left\{-\varepsilon\sin\sqrt{n^2-\varepsilon^2}\,t + \sqrt{n^2-\varepsilon^2}\cos\sqrt{n^2-\varepsilon^2}\,t\right\} + pA\cos(pt-\alpha)\end{aligned}$$

$$\frac{dx}{dt}(t=0) = C_1\cdot 1\{-\varepsilon\cdot 1 - 0\} + C_2\cdot 1\left\{-\varepsilon\cdot 0 + \sqrt{n^2-\varepsilon^2}\cdot 1\right\} + pA\cos(-\alpha) = -y_0 p$$

$$-C_1\varepsilon + C_2\sqrt{n^2-\varepsilon^2} + pA\cos(\alpha) = -y_0 p \tag{b}$$

(a)式より，

$$C_1 = A\sin\alpha = \frac{y_0 p^2}{\sqrt{\left(n^2-p^2\right)^2 + \left(2\varepsilon p\right)^2}}\sin\alpha \tag{3.4}$$

(b)式と式(3.4)より，

$$C_2 = \frac{1}{\sqrt{n^2-\varepsilon^2}}\left(\varepsilon C_1 - pA\cos\alpha - y_0 p\right) \tag{3.5}$$

以上で，式(3.1)の定数が全て明らかとなった．

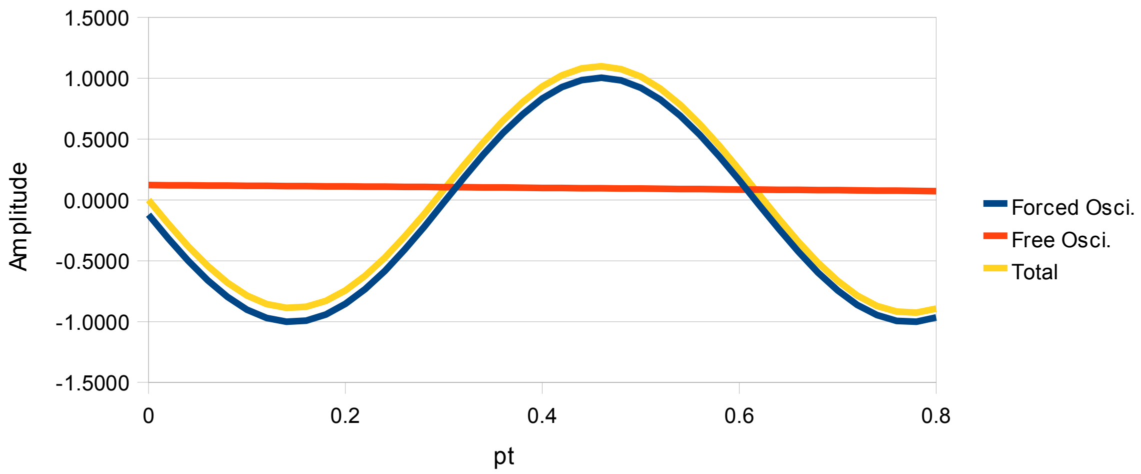
さて，式(3.1)に着目すると，次式のように金井の教科書にある式に似た形式に変形できる可能性があることが分かる．

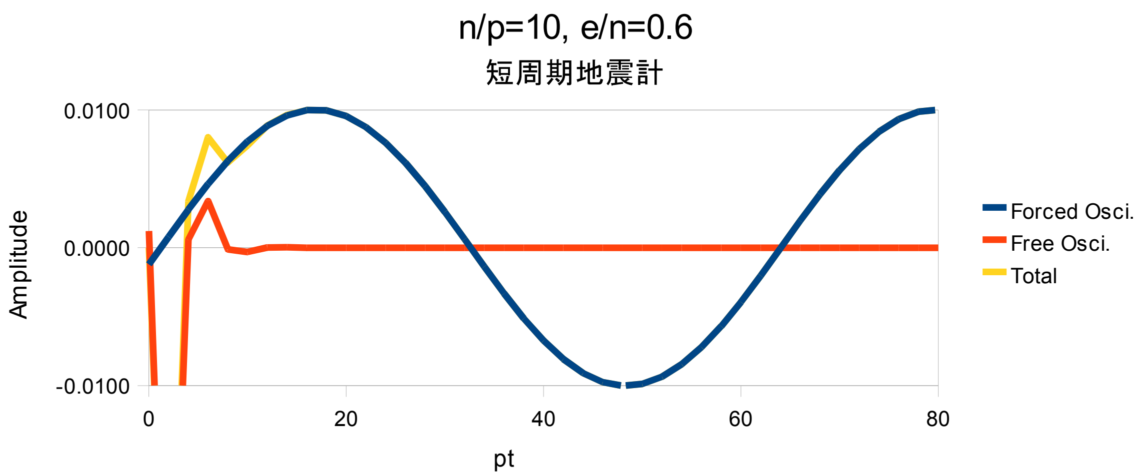
$$x = A\sin\{pt-\alpha\} + \sqrt{C_1^2+C_2^2}\,e^{-\varepsilon t}\sin\{\sqrt{n^2-\varepsilon^2}\,t-\beta\}$$

$$\tan\beta = \frac{C_1}{C_2} \qquad \text{(c)}$$

しかしながら，その変形にかける労力は大変なので，ここでは行わない．実際の計算に際しては，式(3.1)から(3.5)があれば十分であろう．金井の式と坪井の式の差は，初動付近にある．坪井の式に基づくと応答変位は0から始まるが，金井の式に基づくとそうではない．

教科書にある例を解くと次のようになる．この図は，教科書の図そのものである．





参考文献

1) 坪井忠二：　振動論　復刻再版，現代工学社，1976．のセクション61