

# 神戸大学集中講義補足用ノート (version 2)

弘前大理工 御領 潤

2015年12月15日, 16日

目次:

- 補足 A: ホール伝導度とチャーン数
- 補足 B: 時間反転対称性とクラマース縮退
- 補足 C: トポロジカル超伝導とマヨラナ・フェルミオン
- version 1 からの変更点

## 1 補足 A

=====

ねらい:

1. ホール伝導度がチャーン数で表されること (断熱近似)
2. チャーン数のトポロジ的性質
3. 途中で Berry 位相も紹介

=====

絶縁状態にある2次元のプロッホ電子系を考える.

- ハミルトニアン

$$\begin{aligned} H &= H(k_x, k_y) \\ -\frac{\pi}{a} &\leq k_x < \frac{\pi}{a} \\ -\frac{\pi}{a} &\leq k_y < \frac{\pi}{a} \end{aligned} \tag{1}$$

( 正方格子を仮定 )

- $y$  方向に電場

$$\hbar \dot{k}_y = -eE \Rightarrow k_y(t) = k_y(0) - eEt \quad (2)$$

- 時間に依存するシュレーディンガー方程式

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\Psi_{\mathbf{k}}(t)\rangle = H(k_x, k_y(t)) |\Psi_{\mathbf{k}}(t)\rangle \quad (3)$$

- スナップ・ショット ( $t$ ; 固定) の固有状態 プロットホ問題に帰着

$$H(k_x, k_y(t)) |U_n(k_x, k_y(t))\rangle = E_n(k_x, k_y(t)) |U_n(k_x, k_y(t))\rangle \quad (4)$$

$E_n(k_x, k_y(t))$ ; エネルギー・バンド

$n$ ; バンド指数

- 断熱近似

仮定

- $k_y(t)$  の時間変化十分ゆっくり ( 電場弱い )
- バンド・ギャップ  $\Delta E_n(t) = E_{n+1}(k_x, k_y(t)) - E_n(k_x, k_y(t))$  十分大
- レベル交差なし

$\Rightarrow$  バンド間遷移 ( $n \leftrightarrow n+1$ ) なしと近似出来る

$t=0$  で  $n$  番目のレベルなら,  $t>0$  でも常に  $n$  番目のレベル.

up to phase で  $|U_n(k_x, k_y(t))\rangle$  と一致

i.e.,

$$|\Psi_{n\mathbf{k}}(t)\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar} \int_0^t dt' E_n(t') + i\gamma_n(t)} |U_n(k_x, k_y(t))\rangle \quad (5)$$

位相因子の前者  $e^{-\frac{i}{\hbar} \int_0^t dt' E_n(t')}$  ... 動的位相因子 ( 定常状態の時間変化からナイーブに期待)

位相因子の後者  $e^{i\gamma_n(t)}$  ... 非物理的位相因子

時間依存するシュレーディンガー方程式に代入

$$\gamma_n(t) = \int_0^t dt' \langle U_n(k_x, k_y(t')) | i \frac{\partial}{\partial t'} | U_n(k_x, k_y(t')) \rangle \quad (6)$$

ゲージ変換:

$$|U_n(k_x, k_y(t))\rangle \rightarrow |U'_n(k_x, k_y(t))\rangle = e^{i\delta_n(t)} |U_n(k_x, k_y(t))\rangle \quad (7)$$

すると

$$\begin{aligned} \gamma'_n(t) &= \int_0^t dt' \langle U'_n(k_x, k_y(t')) | i \frac{\partial}{\partial t'} | U'_n(k_x, k_y(t')) \rangle \\ &= \gamma_n(t) + \delta_n(t) - \delta_n(0) \end{aligned} \quad (8)$$

$\delta_n(t)$  を適当に選べば, つねに  $\gamma_n(t) = 0$  と出来る. 物理的に無意味.

ただし, 断熱変化が周期的のときには, 面白いことが起こる.

- Berry 位相

今の状況は, 実は周期的.

$k_y$  はブリルアン・ゾーンの周期性をもつので,  $k_y$  と  $k_y + \frac{2n\pi}{a}$  は等価. よって, 時間周期は

$$k_y(T) = k_y(0) - eET = k_y(0) - \frac{2\pi}{a} \quad (9)$$

$$i.e., T = \frac{2\pi}{eEa} \quad (10)$$

この場合,  $\gamma_n(T)$  はゲージ不変.

$t = 0$  と  $t = T$  のハミルトニアンは等価  $\delta_n(T) = \delta_n(0)$ .

$$\begin{aligned} \therefore \gamma'_n(T) &= \int_0^T dk_y \langle U'_n(k_x, k_y(t)) | i \frac{\partial}{\partial t} | U'_n(k_x, k_y(t)) \rangle \\ &= \gamma_n(T) \end{aligned} \quad (11)$$

$\gamma_n(T)$ ...Berry 位相: 勝手に変えることの出来ない, 物理的な量

M. Berry, Proc. R. Soc. London A392, 45 (1984)

いま, 系は  $k_y$  を通してのみ時間依存してるので,

$$\begin{aligned} \gamma_n(T) &= \int_0^{-\frac{2\pi}{a}} dk_y \langle U_n(\mathbf{k}) | i \frac{\partial}{\partial k_y} | U_n(\mathbf{k}) \rangle \\ &\equiv \oint_C d\mathbf{k} \cdot \mathbf{A}_n(\mathbf{k}) \end{aligned} \quad (12)$$

– ベリー接続 ( $\mathbf{k}$  空間のベクトル・ポテンシャル)

$$\mathbf{A}_n(\mathbf{k}) \equiv \langle U_n(\mathbf{k}) | i \frac{\partial}{\partial \mathbf{k}} | U_n(\mathbf{k}) \rangle \quad (13)$$

– ベリー曲率 ( $\mathbf{k}$  空間の磁場)

$$B_z(\mathbf{k}) \equiv \nabla_{\mathbf{k}} \times \mathbf{A}_n(\mathbf{k})|_z \quad (14)$$

- ホール伝導度

電流密度演算子:

$$j_x = -\frac{e}{i\hbar V} [H(k_x, k_y(t)), x] = \frac{e}{\hbar V} \frac{\partial H(k_x, k_y(t))}{\partial k_x} \quad (15)$$

ここで,  $x = i\hbar \frac{\partial}{\partial p_x} = i \frac{\partial}{\partial k_x}$  を用いた.

期待値 (絶対零度):

$$\langle j_x \rangle = -\frac{e}{\hbar V} \sum_{n \leq n_0} \sum_{\mathbf{k}} \langle \Psi_{n\mathbf{k}}(t) | \frac{\partial H(k_x, k_y(t))}{\partial k_x} | \Psi_{n\mathbf{k}}(t) \rangle \quad (16)$$

$$\begin{aligned}
 &= -\frac{e}{\hbar} \sum_{n \leq n_0} \int_{BZ} \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \langle U_{n\mathbf{k}}(t) | \frac{\partial H(k_x, k_y(t))}{\partial k_x} | U_{n\mathbf{k}}(t) \rangle \\
 &= \frac{e}{\hbar} \sum_{n \leq n_0} \int_{BZ} \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \left\{ \left\langle \frac{\partial U_{n\mathbf{k}}(t)}{\partial k_x} | H(k_x, k_y(t)) | U_{n\mathbf{k}}(t) \right\rangle + \left\langle U_{n\mathbf{k}}(t) | H(k_x, k_y(t)) | \frac{\partial U_{n\mathbf{k}}(t)}{\partial k_x} \right\rangle \right\} \\
 &= ie \sum_{n \leq n_0} \int_{BZ} \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \left\{ \left\langle \frac{\partial U_{n\mathbf{k}}(t)}{\partial k_x} | \dot{U}_{n\mathbf{k}}(t) \right\rangle - \left\langle \dot{U}_{n\mathbf{k}}(t) | \frac{\partial U_{n\mathbf{k}}(t)}{\partial k_x} \right\rangle \right\} \\
 &= -i \frac{e^2 E}{2\pi \hbar} \sum_{n \leq n_0} \int_{BZ} \frac{d^2k}{2\pi} \left\{ \left\langle \frac{\partial U_{n\mathbf{k}}}{\partial k_x} | \frac{\partial U_{n\mathbf{k}}}{\partial k_y} \right\rangle - \left\langle \frac{\partial U_{n\mathbf{k}}}{\partial k_y} | \frac{\partial U_{n\mathbf{k}}}{\partial k_x} \right\rangle \right\} \\
 &= -i \frac{e^2 E}{2\pi \hbar} \sum_{n \leq n_0} \int_{BZ} \frac{d^2k}{2\pi} \left\{ \frac{\partial}{\partial k_x} \langle U_{n\mathbf{k}} | \frac{\partial}{\partial k_y} | U_{n\mathbf{k}} \rangle - \frac{\partial}{\partial k_y} \langle U_{n\mathbf{k}} | \frac{\partial}{\partial k_x} | U_{n\mathbf{k}} \rangle \right\} \\
 &= -\frac{e^2 E}{2\pi \hbar} \sum_{n \leq n_0} \int_{BZ} \frac{d^2k}{2\pi} \nabla_{\mathbf{k}} \times \mathbf{A}_n(\mathbf{k})|_z = -\frac{e^2 E}{2\pi \hbar} \sum_{n \leq n_0} \int_{BZ} \frac{d^2k}{2\pi} B_{nz}(\mathbf{k})
 \end{aligned}$$

チャーン数 (Thouless, Kohmoto, Neightingale, den Nijs, PRL ('83))

- チャーン数 = プロットホ状態の  $k$  空間の渦度 = 整数

Kohmoto Ann. Phys. ('85) の証明をはしょったかたちで紹介

ブリルアン・ゾーン上に  $N_n$  個の渦点  $\mathbf{k}_{i=1, \dots, N_n}$  を持つプロットホ状態

$$|U_{n\mathbf{k}}\rangle = e^{i\theta_{n\mathbf{k}}} f_{n\mathbf{k}} \quad (17)$$

$$f_{n\mathbf{k}} = \text{amp} \{|U_{n\mathbf{k}}\rangle\} (= \text{real}) \quad (18)$$

$$\nabla_{\mathbf{k}} \times \nabla_{\mathbf{k}} \theta_{n\mathbf{k}} = 2\pi \hat{z} \sum_{i=1}^{N_n} \delta^2(\mathbf{k} - \mathbf{k}_i) \quad (19)$$

一価性より, 各渦点  $\mathbf{k}_{i=1, \dots, N_n}$  のまわりで  $2\pi$  (の整数倍) しか回れないことに注目  
(cf; 超伝導体の量子渦)

$$\begin{aligned}
 \mathbf{A}(\mathbf{k}) &= \langle U_{n\mathbf{k}} | i \nabla_{\mathbf{k}} | U_{n\mathbf{k}} \rangle \\
 &= -\nabla_{\mathbf{k}} \theta_{n\mathbf{k}} + i f_{n\mathbf{k}} \nabla_{\mathbf{k}} f_{n\mathbf{k}} \\
 &= -\nabla_{\mathbf{k}} \theta_{n\mathbf{k}} + \frac{i}{2} \nabla_{\mathbf{k}} f_{n\mathbf{k}}^2 \\
 &= -\nabla_{\mathbf{k}} \theta_{n\mathbf{k}}
 \end{aligned} \quad (20)$$

(規格化条件より  $f_{n\mathbf{k}}^2 = 1$ )

$$\therefore \int_{BZ} \frac{d^2k}{2\pi} \nabla_{\mathbf{k}} \times \mathbf{A}(\mathbf{k})|_z = - \int_{BZ} \frac{d^2k}{2\pi} \nabla_{\mathbf{k}} \times \nabla_{\mathbf{k}} \theta_{n\mathbf{k}}|_z = -N_n \quad (21)$$

$$\sigma_{xy} = \frac{e^2 E}{2\pi \hbar} \sum_{n \leq n_0} N_n \quad (22)$$

- 時間反転:  $\sigma_{xy} \rightarrow -\sigma_{xy}$ .  $\sigma_{xy} \neq 0$ ... 時間反転の破れ (磁場や磁氣的秩序) が必要条件
- Berry 位相との関連:  $\mathbf{A}(\mathbf{k})$  の面積分 = 線積分. 各渦点  $\mathbf{k}_i$  のまわりの Berry 位相の和

## 2 補足 B: 時間反転対称性とクラマースの定理

### 2.1 波動関数に対する時間反転変換

方針:

自明に時間反転対称な系を考え, その系のシュレーディンガー方程式が時間反転変換のもとで不変になるように, 波動関数の変換性を決める.

#### 1. スピンレス粒子の場合

- 例) 自由粒子のシュレーディンガー方程式

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(\mathbf{x}, t) = -\frac{\hbar^2 \nabla^2}{2m} \psi(\mathbf{x}, t) \quad (23)$$

- $t \rightarrow -t$

$$-i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(\mathbf{x}, -t) = -\frac{\hbar^2 \nabla^2}{2m} \psi(\mathbf{x}, -t) \quad (24)$$

- 両辺の複素共役

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi^*(\mathbf{x}, -t) = -\frac{\hbar^2 \nabla^2}{2m} \psi^*(\mathbf{x}, -t) \quad (25)$$

元の方程式と一致する. よって, 時間反転変換は

$$\mathcal{T}_0 \psi(\mathbf{x}, t) = \psi^*(\mathbf{x}, -t) \quad (26)$$

とすればよい.

#### 2. スピン 1/2 の粒子の場合

- 例) 自由粒子 + スピン軌道相互作用

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(\mathbf{x}, t) = \left\{ -\frac{\hbar^2 \nabla^2}{2m} + \lambda \mathbf{L} \cdot \hat{\mathbf{S}} \right\} \psi(\mathbf{x}, t) \quad (27)$$

$$\mathbf{L} = \nabla U(\mathbf{x}) \times (-i\hbar \nabla) \quad (28)$$

$$\mathbf{S} = \frac{\hbar}{2} (\hat{\sigma}_x, \hat{\sigma}_y, \hat{\sigma}_z) \quad (29)$$

$\mathbf{L}$  と  $\mathbf{S}$  はともに軌道角運動量  $\mathbf{r} \times \mathbf{p}$  と同じ変換性 (時間反転に対して奇)

$\mathbf{L} \cdot \mathbf{S}$  は時間反転不変

- $t \rightarrow -t$

$$-i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(\mathbf{x}, -t) = \left\{ -\frac{\hbar^2 \nabla^2}{2m} + \lambda \mathbf{L} \cdot \hat{\mathbf{S}} \right\} \psi(\mathbf{x}, -t) \quad (30)$$

- 両辺の複素共役

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi^*(\mathbf{x}, -t) = \left\{ -\frac{\hbar^2 \nabla^2}{2m} - \lambda \mathbf{L} \cdot \hat{\mathbf{S}}^* \right\} \psi^*(\mathbf{x}, -t) \quad (31)$$

ここで,  $L^* = -L$  を用いた. パウリ行列の性質から

$$\mathbf{S}^* = -\hat{\sigma}_y \mathbf{S} \hat{\sigma}_y \quad (32)$$

よって, 両辺左から  $\sigma_y$  を掛けると,

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \sigma_y \psi^*(\mathbf{x}, -t) = \left\{ -\frac{\hbar^2 \nabla^2}{2m} + \lambda \mathbf{L} \cdot \hat{\mathbf{S}} \right\} \sigma_y \psi^*(\mathbf{x}, -t) \quad (33)$$

となり, 元の方程式と一致する. それゆえ, 時間反転変換は

$$\mathcal{T}_{1/2} \psi(\mathbf{x}, t) = \hat{\sigma}_y \psi^*(\mathbf{x}, -t) \quad (34)$$

とすればよい ( $\hat{\sigma}_y$  はちょうどスピン反転を表す).

### 3. 時間反転演算子の性質

$$\mathcal{T}_0 = K \quad (35)$$

$$\mathcal{T}_{1/2} = \sigma_y K \quad (36)$$

と書ける. ただし,  $K$  は複素共役をとる演算子. よって,

$$\mathcal{T}_0^2 = K^2 = +1 \quad (37)$$

$$\mathcal{T}_{1/2}^2 = \hat{\sigma}_y K (\hat{\sigma}_y K) = \hat{\sigma}_y \hat{\sigma}_y^* K^2 = -\hat{\sigma}_y^2 = -1 \quad (38)$$

## 2.2 クラマースの定理

『スピン 1/2 を持つ時間反転対称な状態 ( $\mathcal{T}_{1/2}$  の固有状態) には必ず縮退が存在する』

証明) 背理法を用いる.

縮退が存在しないと仮定すると,

$$\mathcal{T}_{1/2} |\psi\rangle = C |\psi\rangle \quad (39)$$

ここで,

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_{1/2}^2 |\psi\rangle &= \mathcal{T}_{1/2} (C |\psi\rangle) = C^* \mathcal{T}_{1/2} |\psi\rangle = |C|^2 |\psi\rangle \\ &= -|\psi\rangle. \end{aligned} \quad (40)$$

$|C|^2 = -1$  となり, 矛盾.

### 3 補足 C: マヨラナ・フェルミオンと非可換統計渦

ねらい

=====

- 『マヨラナ・フェルミオン』 = 『実演算子で記述されるフェルミオン』 i.e.  $\eta = \eta^\dagger$
- トポロジカル超伝導状態のゼロ・エネルギー状態は, (適当な条件下で) マヨラナ・フェルミオンとなる
- 2次元スピンレス・カイラル  $p$ -波 (もっとも簡単な系) を例にとって議論
- この系の渦  
渦芯にマヨラナ状態が束縛  
非可換統計性に従う. ボゾンでもフェルミオンでもエニオンでもない !!

=====

#### 3.1 スピンレス・カイラル $p$ -波の境界状態 マヨラナ・フェルミオン

- 単一バンド・スピンレスフェルミオンのハミルトニアン

$$H = \int d^2x \psi^*(\mathbf{x}) \hat{K} \psi(\mathbf{x}) + \frac{1}{2} \int d^2x_1 \int d^2x_2 V(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) \psi^*(\mathbf{x}_1) \psi^*(\mathbf{x}_2) \psi(\mathbf{x}_2) \psi(\mathbf{x}_1) \quad (41)$$

$$\hat{K} = -\frac{\hbar^2 \nabla^2}{2m} - \epsilon_F$$

- ペアリングの平均場:  $\langle \psi(\mathbf{x}_2) \psi(\mathbf{x}_1) \rangle \neq 0$
- 平均場近似 (多体相互作用を1体のかたちに近似)

$$\begin{aligned} & \psi^*(\mathbf{x}_1) \psi^*(\mathbf{x}_2) \psi(\mathbf{x}_2) \psi(\mathbf{x}_1) \\ &= [\{\psi^*(\mathbf{x}_1) \psi^*(\mathbf{x}_2) - \langle \psi^*(\mathbf{x}_1) \psi^*(\mathbf{x}_2) \rangle\} + \langle \psi^*(\mathbf{x}_1) \psi^*(\mathbf{x}_2) \rangle] \\ & \quad \times [\{\psi(\mathbf{x}_2) \psi(\mathbf{x}_1) - \langle \psi(\mathbf{x}_2) \psi(\mathbf{x}_1) \rangle\} + \langle \psi(\mathbf{x}_2) \psi(\mathbf{x}_1) \rangle] \\ &\simeq \{\psi^*(\mathbf{x}_1) \psi^*(\mathbf{x}_2) - \langle \psi^*(\mathbf{x}_1) \psi^*(\mathbf{x}_2) \rangle\} \langle \psi(\mathbf{x}_2) \psi(\mathbf{x}_1) \rangle \\ & \quad + \langle \psi^*(\mathbf{x}_1) \psi^*(\mathbf{x}_2) \rangle \{\psi(\mathbf{x}_2) \psi(\mathbf{x}_1) - \langle \psi(\mathbf{x}_2) \psi(\mathbf{x}_1) \rangle\} \\ & \quad + \langle \psi^*(\mathbf{x}_1) \psi^*(\mathbf{x}_2) \rangle \langle \psi(\mathbf{x}_2) \psi(\mathbf{x}_1) \rangle \\ &= \psi^*(\mathbf{x}_1) \psi^*(\mathbf{x}_2) \langle \psi(\mathbf{x}_2) \psi(\mathbf{x}_1) \rangle + \langle \psi^*(\mathbf{x}_1) \psi^*(\mathbf{x}_2) \rangle \psi(\mathbf{x}_2) \psi(\mathbf{x}_1) \\ & \quad - \langle \psi^*(\mathbf{x}_1) \psi^*(\mathbf{x}_2) \rangle \langle \psi(\mathbf{x}_2) \psi(\mathbf{x}_1) \rangle \end{aligned} \quad (42)$$

- 平均場ハミルトニアン

$$\begin{aligned}
 H_{\text{mf}} &= \int d^2x \psi^*(\mathbf{x}) \hat{K} \psi(\mathbf{x}) \\
 &\quad + \frac{1}{2} \int d^2x_1 \int d^2x_2 (\Delta^*(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \psi(\mathbf{x}_2) \psi(\mathbf{x}_1) + \Delta(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \psi^*(\mathbf{x}_1) \psi^*(\mathbf{x}_2)) + E_c
 \end{aligned} \tag{43}$$

ここで,  $\Delta(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$ ; ギャップ関数

$$\Delta(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = V(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) \langle \psi(\mathbf{x}_2) \psi(\mathbf{x}_1) \rangle \tag{44}$$

並進対称性はない ( 試料境界があるので). 相対座標のみフーリエ変換.

$$\Delta(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = \Delta_G \left( \frac{\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2}{2} \right) \int \frac{d^2p}{(2\pi)^2} e^{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2)} \Psi(\mathbf{k}) \tag{45}$$

- スピンレス・カイラル  $p$ -波

$$\Psi(\mathbf{k}) = k_x + ik_y \tag{46}$$

このとき,

$$\begin{aligned}
 \Delta(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) &= i\Delta_G \left( \frac{\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2}{2} \right) (\partial_{2x} + i\partial_{2y}) \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} e^{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2)} \\
 &= i\Delta_G(\mathbf{x}_1) (\partial_{2x} + i\partial_{2y}) \delta^2(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2)
 \end{aligned} \tag{47}$$

ただし, 微分演算子  $\partial_{2x} + i\partial_{2y}$  は  $\mathbf{x}_2$  にのみ作用する. これを部分積分してフェルミオン演算子に作用させると (ここで,  $\Delta_G(\mathbf{x}_1)$  に微分は作用しないことに注意)

$$\begin{aligned}
 H_{\text{mf}} &= \int d^2x \psi^*(\mathbf{x}) \hat{K} \psi(\mathbf{x}) \\
 &\quad + \frac{1}{2} \int d^2x_1 \int d^2x_2 \delta^2(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) i\Delta_G^*(\mathbf{x}_1) \{(\partial_{2x} - i\partial_{2y}) \psi(\mathbf{x}_2)\} \psi(\mathbf{x}_1) \\
 &\quad - \frac{1}{2} \int d^2x_1 \int d^2x_2 \delta^2(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) i\Delta_G(\mathbf{x}_1) \psi^*(\mathbf{x}_1) \{(\partial_{2x} + i\partial_{2y}) \psi^*(\mathbf{x}_2)\} + E_c \\
 &= \frac{1}{2} \int d^2x (\psi(\mathbf{x})^* \psi(\mathbf{x})) \begin{pmatrix} \hat{K} & -i\Delta_G(\mathbf{x})(\partial_x + i\partial_y) \\ -i\Delta_G^*(\mathbf{x})(\partial_x - i\partial_y) & -\hat{K} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi(\mathbf{x}) \\ \psi^*(\mathbf{x}) \end{pmatrix} + E_c \\
 &\equiv \frac{1}{2} \int d^2x \Psi^\dagger(\mathbf{x}) \hat{\mathcal{H}} \Psi(\mathbf{x}) + E_c \\
 \hat{\mathcal{H}} &= \begin{pmatrix} \hat{K} & -i\Delta_G(\mathbf{x})(\partial_x + i\partial_y) \\ -i\Delta_G^*(\mathbf{x})(\partial_x - i\partial_y) & -\hat{K} \end{pmatrix} \\
 \Psi(\mathbf{x}) &= \begin{pmatrix} \psi(\mathbf{x}) \\ \psi^*(\mathbf{x}) \end{pmatrix}
 \end{aligned} \tag{48}$$

ハミルトニアン行列  $\hat{\mathcal{H}}$  は一見するとエルミート性と矛盾するよう見えるが,  $\hat{\mathcal{H}}^\dagger$  では微分が右微分から左微分が変わることに注意. 部分積分を行い右微分に直すと, 明白に  $\hat{\mathcal{H}}$  に戻ることが解る (部分積分の際,  $\Delta_G(\mathbf{x})$  に微分がかかる項は  $\psi(\mathbf{x})$  のグラスマン性  $\psi^2(\mathbf{x}) = 0$  から落ちる).

- Bogoliubov-de Gennes 方程式 (エネルギー固有値方程式)

$$\hat{\mathcal{H}} U_E(\mathbf{x}) = E U_E(\mathbf{x}) \tag{49}$$



- particle-hole 対称性

$$\Gamma = \tau_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (50)$$

に対し,

$$\Gamma^\dagger \hat{\mathcal{H}} \Gamma = -\hat{\mathcal{H}}^* \quad (51)$$

ところで,  $E$  は実数より, 固有値方程式の両辺の複素共役をとると,

$$\hat{\mathcal{H}}^* U_E^*(\mathbf{x}) = E U_E^*(\mathbf{x}) \quad (52)$$

$$\therefore \mathcal{H} \Gamma U_E^*(\mathbf{x}) = -E \Gamma U_E^*(\mathbf{x}) \quad (53)$$

( $\Gamma^\dagger \Gamma = 1$  を用いた.) よって,

$$\Gamma U_E(\mathbf{x}) = C_E U_{-E}^*(\mathbf{x}) \quad (54)$$

すなわち,  $E > 0$  と  $-E < 0$  の解が必ずペア.

- 境界状態 マヨラナ・フェルミオン

カイラル  $p$ -波... バルク/境界対応により境界には必ずゼロ・モード存在

$$\Gamma U_0(\mathbf{x}) = C_0 U_0^*(\mathbf{x}) \quad (55)$$

ところで,

$$\Gamma^2 = +1 \quad (56)$$

$$\begin{aligned} \therefore \Gamma^2 U_0(\mathbf{x}) &= C_0 \Gamma U_0^*(\mathbf{x}) = |C_0|^2 U_0(\mathbf{x}) \\ &= U_0(\mathbf{x}) \end{aligned} \quad (57)$$

$\therefore C_0 = 1$  と選んでさしつかえない.

- 注) もし  $p$ -h 変換が  $\Gamma^2 = -1$  であったとすると... ゼロ・エネルギー状態に縮退が存在 (参考; クラマース縮退)

モード展開

$$\Psi(\mathbf{x}) = \sum_{E>0} (\gamma_E U_E(\mathbf{x}) + \gamma_{-E} U_{-E}(\mathbf{x})) + \eta U_0(\mathbf{x}) \quad (58)$$

また,

$$\begin{aligned} \Gamma \Psi^*(\mathbf{x}) &= \sum_{E>0} (\gamma_E^\dagger \Gamma U_E^*(\mathbf{x}) + \gamma_{-E}^\dagger \Gamma U_{-E}^*(\mathbf{x})) + \eta^\dagger \Gamma U_0^*(\mathbf{x}) \\ &= \sum_{E>0} (\gamma_E^\dagger U_{-E}(\mathbf{x}) + \gamma_{-E}^\dagger U_E(\mathbf{x})) + \eta^\dagger U_0(\mathbf{x}) \end{aligned} \quad (59)$$

ところで,

$$\Psi(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \psi(\mathbf{x}) \\ \psi^*(\mathbf{x}) \end{pmatrix} \quad (60)$$

であるから,

$$\Gamma\Psi^*(\mathbf{x}) = \Psi(\mathbf{x}). \quad (61)$$

各モードの直交性を使うと,

$$\gamma_E^\dagger = \gamma_{-E} \quad (62)$$

$$\eta^\dagger = \eta \quad (63)$$

よって, ゼロ・モードの演算子  $\eta$  はマヨラナ (実) 演算子となる.

- 第二量子化について

準粒子場  $\Psi(\mathbf{x})$  の反交換関係  $\{\Psi_\alpha(\mathbf{x}), \Psi_\beta^\dagger(\mathbf{x}')\} = \delta_{\alpha\beta}\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$  より,

$$\{\eta, \eta^\dagger\} = 1. \quad (64)$$

しかし,  $\eta = \eta^\dagger$  なので,

$$\eta^2 = 1. \quad (65)$$

すると,

$$\eta|0\rangle = 0 \quad (66)$$

となるような真空を定義出来ない (上式に左から  $\eta$  を書けると  $|0\rangle = 0$ ).

2つマヨラナ状態  $\eta_1, \eta_2$  があるとすると, 互いに独立な複素演算子

$$\begin{cases} \tilde{\eta} = \frac{1}{2}(\eta_1 + i\eta_2) \\ \tilde{\eta}^\dagger = \frac{1}{2}(\eta_1 - i\eta_2) \end{cases} \quad (67)$$

をつくる事が出来, かつ,  $\{\tilde{\eta}, \tilde{\eta}^\dagger\} = 1$  なので, 通常通り  $\tilde{\eta}|0\rangle = 0$  より真空を定義出来る. しかし,  $\eta_1, \eta_2$  が局所的に定義出来ると ( $\Gamma^2 = -1$  で1つの境界に縮退がある場合), ふつうの Dirac 演算子となり特別なことは起こらない.

$\eta_1, \eta_2$  が局所的に定義出来ない場合に非自明なことが起こる (下記, 渦の項参照).

### 3.2 非可換統計渦

- スピンレス・カイラル  $p$ -波の渦

渦の中心... 磁束をとおすため超伝導は壊れている  $\simeq$  穴とみなせる i.e. 境界が出来ている

『バルク/境界対応により, マヨラナ・フェルミオンが1個存在』

↓

『非可換統計性: 渦を交換したときに, 非可換位相が生じる』

D. A. Ivanov, Phys. Rev. Lett. **86**, 268 (2001)

量子計算への応用: Review として, C. Nayak, et al. Rev. Mod. Phys. **80**, 1083 (2008)

### 3.2.1 渦が2個の場合

- マヨラナ演算子:  $i(=1,2)$  番目の渦に束縛されている状態の演算子  $\eta_i$   $\{\eta_i, \eta_j^\dagger\} = \delta_{ij}$
- Dirac (複素) 演算子:

$$\begin{cases} \tilde{\eta} = \frac{1}{2}(\eta_1 + i\eta_2) \\ \tilde{\eta}^\dagger = \frac{1}{2}(\eta_1 - i\eta_2) \end{cases}, \quad \{\tilde{\eta}, \tilde{\eta}^\dagger\} = 1. \quad (68)$$

注:  $\eta_1$  と  $\eta_2$  は空間的に離れている. この Dirac 演算子は非局所的.

- フォック空間:

$$|0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, |1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (69)$$

- $\tilde{\eta}|0\rangle = 0, |1\rangle = \tilde{\eta}^\dagger|0\rangle$
- 2重縮退していることに注意 (2つとも基底状態 (ゼロ・エネルギー))

- 特異ゲージ変換

BdG 方程式でギャップ関数の位相を準粒子場に押し付ける

$$\Psi(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \psi(\mathbf{x}) \\ \psi^*(\mathbf{x}) \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \psi(\mathbf{x})e^{i\theta(\mathbf{x})/2} \\ \psi^*(\mathbf{x})e^{-i\theta(\mathbf{x})/2} \end{pmatrix} \quad (70)$$

- $\theta(\mathbf{r})$ ... 渦1と2の回りでそれぞれ  $2\pi$  まわる位相, i.e. 多価関数
- それぞれの渦から半直線的な branch cut が生じる
- branch cut を準粒子がまたぐ... $\theta(\mathbf{x})$  は  $\pm 2\pi$  jump.  $\Psi(\mathbf{x}) \rightarrow -\Psi(\mathbf{x})$

- 渦の交換 ( 図 1)

どちらか一方の渦は必ずもう一方の渦から伸びる cut を通らざるを得ない.

ところで, 一般性を失わずに (任意の渦配置に対し, 適当に座標を選べば常に下記が可能)

- 交換前の渦1の  $y$  座標は2のそれより大きい
- branch cut は  $x$  軸に平行で負の方向へ伸びている
- 交換するときは, お互いのまわりを時計回りに回ると出来る. すると2が1の cut を通る. 交換によって

$$\eta_1 \rightarrow \eta_2, \eta_2 \rightarrow -\eta_1 \quad (71)$$

\*ここで 1,2 は渦の名前というより, マヨラナ粒子の場所を表す. この交換を表す演算子は

$$T_{12} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 + \eta_2\eta_1) = \exp\left[\frac{\pi}{4}\eta_2\eta_1\right] \quad (72)$$

と書ける (マヨラナ演算子には  $T_{12}\eta_i T_{12}^{-1}$  と作用). これは

$$T_{12} = \exp\left[i\frac{\pi}{4}(2\tilde{\eta}^\dagger\tilde{\eta} - 1)\right] \quad (73)$$

と書けるので, フォック空間  $|0\rangle, |1\rangle$  への表現行列は

$$D(T_{12}) = \begin{pmatrix} e^{-i\pi/4} & 0 \\ 0 & e^{i\pi/4} \end{pmatrix} = \exp\left[-i\frac{\pi}{4}\sigma_z\right]. \quad (74)$$

- 交換前に系の状態が  $|0\rangle$  だとすると, 交換後は  $D(T_{12})|0\rangle = \exp(-i\frac{\pi}{4})|0\rangle$
- 交換前に系の状態が  $|1\rangle$  だとすると, 交換後は  $D(T_{12})|1\rangle = \exp(i\frac{\pi}{4})|1\rangle$
- 交換前と同じ状態に戻るという意味では可換統計 ( エニオン ) と大差ない

### 3.2.2 渦が 4 本の場合

- マヨラナ演算子:  $\eta_{i=1,\dots,4}, \{\eta_i, \eta_j^\dagger\} = \delta_{ij}$
- 2 種類の Dirac 演算子 (渦 1 と 2, 渦 3 と 4 でペアを組ませる)

$$\begin{cases} \tilde{\eta} = \frac{1}{2}(\eta_1 + i\eta_2) \\ \tilde{\eta}^\dagger = \frac{1}{2}(\eta_1 - i\eta_2) \end{cases}, \quad \{\tilde{\eta}, \tilde{\eta}^\dagger\} = 1; \quad \begin{cases} \tilde{\xi} = \frac{1}{2}(\eta_3 + i\eta_4) \\ \tilde{\xi}^\dagger = \frac{1}{2}(\eta_3 - i\eta_4) \end{cases}, \quad \{\tilde{\xi}, \tilde{\xi}^\dagger\} = 1 \quad (75)$$

- フォック空間:

$$|0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, |1\rangle = \tilde{\eta}^\dagger|0\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, |2\rangle = \tilde{\xi}^\dagger|0\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, |3\rangle = \tilde{\eta}^\dagger\tilde{\xi}^\dagger|0\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (76)$$

- 渦の交換 ( 図 1 )

独立な 3 パターンの交換を考える.

- $1 \leftrightarrow 2$

$$\eta_1 \rightarrow \eta_2, \eta_2 \rightarrow -\eta_1 \quad (77)$$

$$T_{12} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 + \eta_2\eta_1) = \exp\left[\frac{\pi}{4}\eta_2\eta_1\right] = \exp\left[i\frac{\pi}{4}(2\tilde{\eta}^\dagger\tilde{\eta} - 1)\right] \quad (78)$$

$$D(T_{12}) = \text{diag}(\exp(-i\pi/4), \exp(i\pi/4), \exp(-i\pi/4), \exp(i\pi/4)) \quad (79)$$

- $3 \leftrightarrow 4$

$$\eta_3 \rightarrow \eta_4, \eta_4 \rightarrow -\eta_3 \quad (80)$$

$$T_{34} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 + \eta_4\eta_3) = \exp\left[\frac{\pi}{4}\eta_4\eta_3\right] = \exp\left[i\frac{\pi}{4}(2\tilde{\xi}^\dagger\tilde{\xi} - 1)\right] \quad (81)$$

$$D(T_{34}) = \text{diag}(\exp(-i\pi/4), \exp(-i\pi/4), \exp(i\pi/4), \exp(i\pi/4)) \quad (82)$$

- $2 \leftrightarrow 3$  (ペアを組ませていない渦同士の交換)

$$\eta_2 \rightarrow \eta_3, \eta_3 \rightarrow -\eta_2 \quad (83)$$

$$T_{23} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 + \eta_3\eta_2) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left\{1 + i(\tilde{\xi}^\dagger + \tilde{\xi})(\tilde{\eta}^\dagger - \tilde{\eta})\right\} \quad (84)$$

$$D(T_{23}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 1 & -i & 0 \\ 0 & -i & 1 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (85)$$

交換後に元の状態に戻らない!!

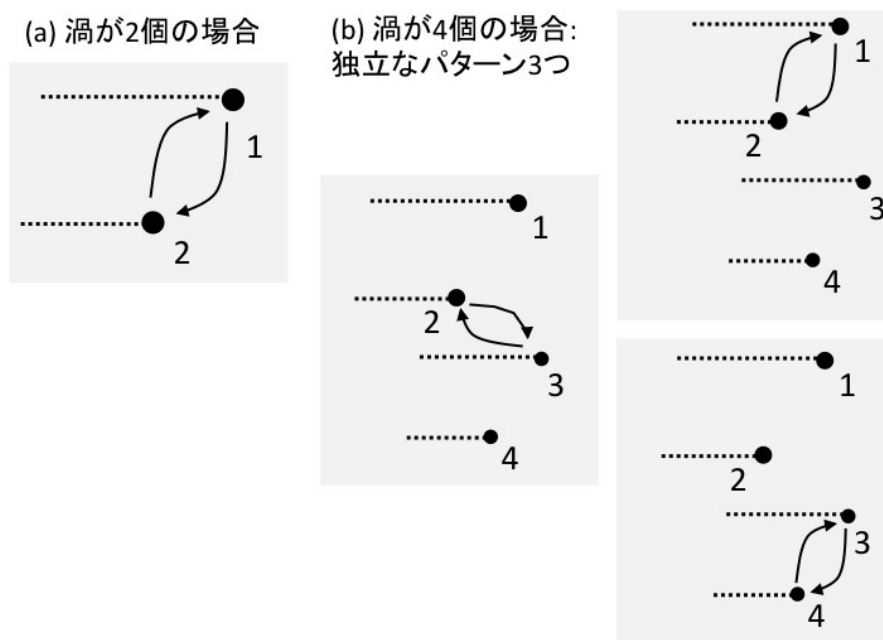


Figure 1: 渦糸の交換操作. 点線は branch cut を表す.

#### 4 version 1 からの変更点

下記の点を加筆・修正（講義中のご質問・コメントに感謝申し上げます）.

- (31) 式, (33) 式の波動関数に対する複素共役記号  $*$  の付け忘れを修正.
- (41) 式の多体相互作用の前の因子  $\frac{1}{2}$  の付け忘れを修正. それに伴い (43), (48) 式も修正.
- (47) 式の後に次のコメントを挿入: 「ただし, 微分演算子  $\partial_{2x} + i\partial_{2y}$  は  $x_2$  にのみ作用する. これを部分積分してフェルミオン演算子に作用させると (ここで,  $\Delta_G(x_1)$  に微分は作用しないことに注意)」
- (48) 式のエルミート性に関するコメントを追加: 「ハミルトニアン行列  $\hat{\mathcal{H}}$  は一見するとエルミート性と矛盾するよう見えるが,  $\hat{\mathcal{H}}^\dagger$  では微分が右微分から左微分が変わることに注意. 部分積分を行い右微分に直すと, 明白に  $\hat{\mathcal{H}}$  に戻ることが解る (部分積分の際,  $\Delta_G(x)$  に微分がかかる項は  $\psi(x)$  のグラスマン性  $\psi^2(x) = 0$  から落ちる).」
- (67), (68), (75) 式の Dirac 演算子に対する規格化定数の誤りを修正: (誤)  $\frac{1}{\sqrt{2}}$   $\rightarrow$  (正)  $\frac{1}{2}$ .
- (68), (75) 式の Dirac 演算子に対する反交換関係の右边を修正: (誤)  $\delta_{ij}$   $\rightarrow$  (正) 1.