トポロジカル絶縁体・超伝導体入門

弘前大学 理工学部
御領 潤

イントロダクション

クイック・レビュー(トポロジー, バンド理論, トポロジカル絶縁体・超伝導体…etc)
＆
おおまかな話の流れ

トポロジー

トポロジー（数学の一分野）

連続変形*)でつながる図形はすべておなじとみなす

*)切ったり貼ったり、穴をあけたりつぶしたりはしない

- 図形の大局的（おおざっぱな）性質を議論
- 局所的な（細かい）違いは無視

例えば…

と

は

穴ぼこが一個だから同じ図形（連続変形でつながる）

イントロダクション

『ああ、ひもじい…』

連続変化でつながるもの同士 ⇄ 同じ

ということは…

違うもの同士 ⇄ ***不連続***な変化

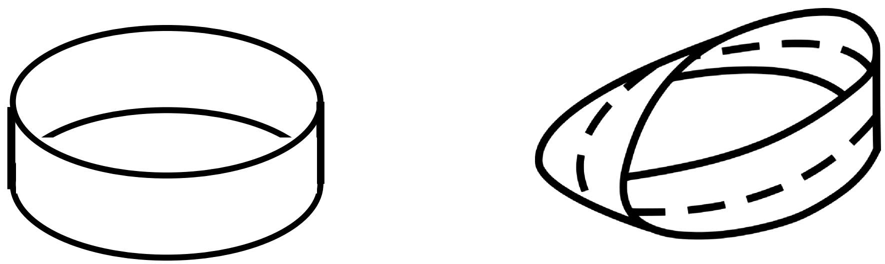
- 不連続な変化をしなければ, トポロジーは変化しない ⇒ *頑強*

- トポロジーの違いは不連続な量, i.e. *整数値* で特徴づけられる

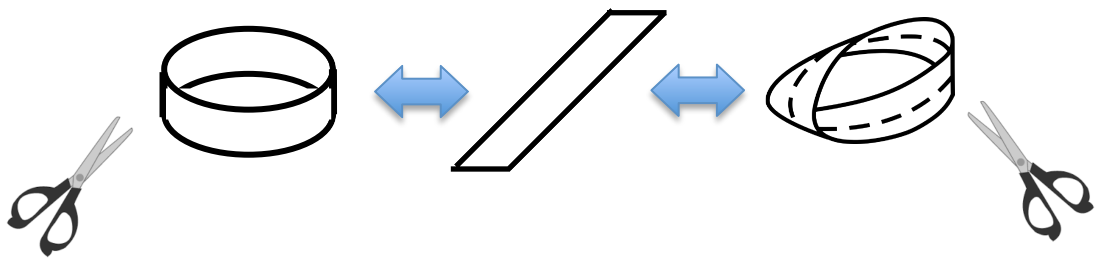
トポロジカル数
（物理量の量子化と関係付けられる場合あり）
磁束の量子化, 量子ホール効果…etc

トポロジー的性質は, 頑強

例）ふつうの輪とメビウスの輪



いったん輪を切って、はりつけ直さないといけない



“狼藉”を働かないかぎり, ちょっとやそっとでは変わらない
i.e. 頑強である

連続変化でつながるもの同士 ⇄ 同じ

ということは...

違うもの同士 ⇄ ***不連続***な変化

・不連続な変化をしなければ, トポロジーは変化しない ⇒ *頑強*

・トポロジーの違いは不連続な量, i.e. *整数値* で特徴づけられる

トポロジカル数
(物理量の量子化と関係付けられる場合あり)
磁束の量子化, 量子ホール効果...etc

凝縮系とトポロジー

さまざまな応用

方程式の解を
トポロジーを使って解析

実空間のトポロジー

- 量子渦
- スキルミオン
- モノポール

“励起状態”
トポロジーによって準安定化

波数空間のトポロジー

- トポロジカル絶縁体・超伝導体
- グラフェン
- 半金属

“基底状態”
トポロジーで保護され摂動に強い

凝縮系とトポロジー
さまざまな応用

方程式の解を
トポロジーを使って解析

今回のテーマ

実空間のトポロジー

量子渦
スキルミオン
モノポール

“励起状態”
トポロジーによって準安定化

波数空間のトポロジー

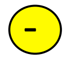
トポロジカル絶縁体・超伝導体
グラフェン
半金属

“基底状態”
トポロジーで保護され摂動に強い

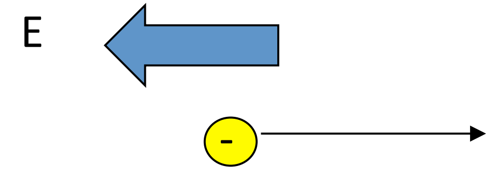
固体中の電子とバンド理論

自由な電子系

- 自由電子が一個



電場をかけると…

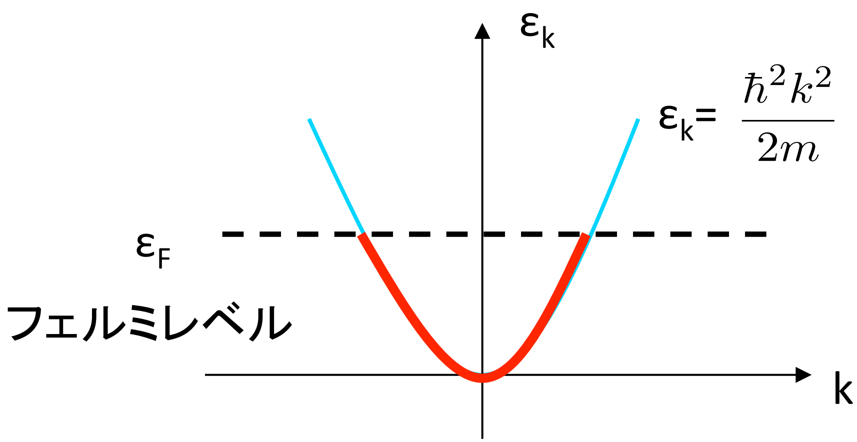


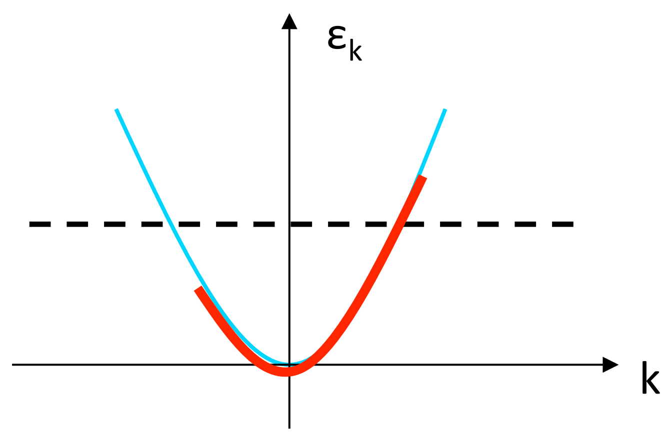
加速される

$$\langle \hbar \dot{k} \rangle = -eE$$

- 自由電子が N 個（自由電子ガス）

電場をかけると…





赤; 詰まっている状態
青 ; 空いている状態

v>0の状態数 – v<0の状態数 $\neq$ 0
⇒ 電流が流れる（金属）

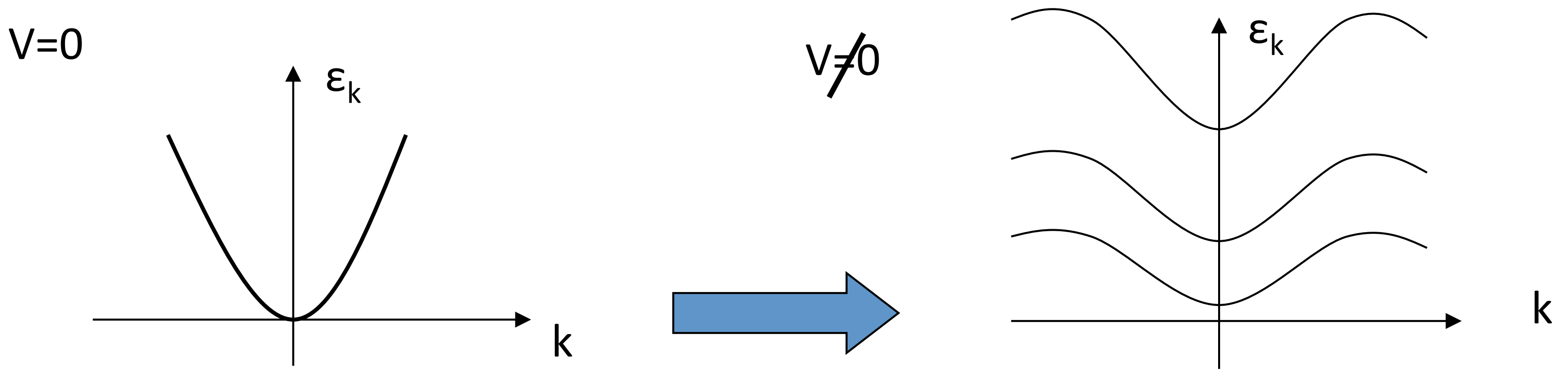
フェルミ・レベルの上下に隙間,
すなわち, エネルギー・ギャップ
がないこと（***ギャップレス***）がポイント

自由電子＋周期ポテンシャル

固体中の電子は***<u>結晶の周期ポテンシャル中</u>***を運動する

周期ポテンシャル V(x) の効果

- 電子のエネルギースペクトル



0から∞まで連続分布

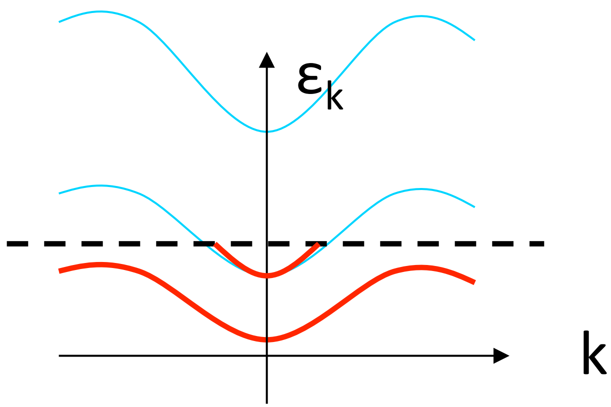
有限の幅を持ち, k に関して
周期的*)なスペクトル
が複数個現れる　*)ブリルアン・ゾーン

ブロッホのバンド理論

金属と絶縁体

バンドが出来ると...
フェルミ・レベルの入り方に2つのパターン

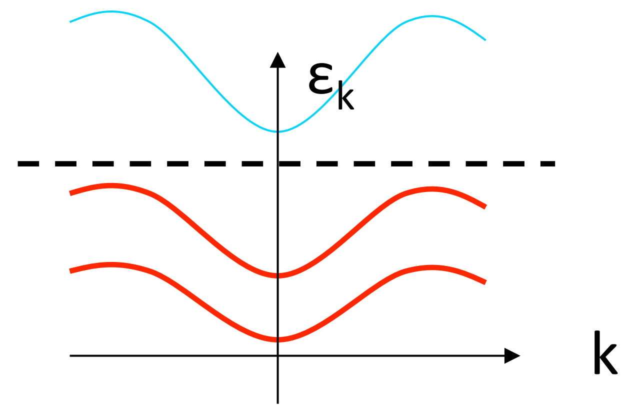
①フェルミ・レベルがバンドをよぎる



ギャップレス

→ 金属

②フェルミレベルがバンドとバンドの間にある



バンド・ギャップあり!!

→ 絶縁体

トポロジカル絶縁体

絶縁体のブロッホ波動関数がもつ
波数空間のトポロジー

- トポロジーの違いは不連続的

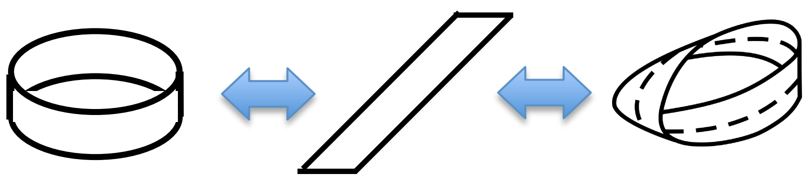
  ⇒ 物理量の量子化と関連する場合がある

  例）量子（スピン）ホール伝導度

- ギャップに守られている ⇒ 摂動に対して「頑強」

  （バンド・ギャップがゼロにならない限り，トポロジーは不変）

Cf)リングの例え



トポロジーを変えるには帯を切る!!

切る ⇄ バンド・ギャップをつぶす

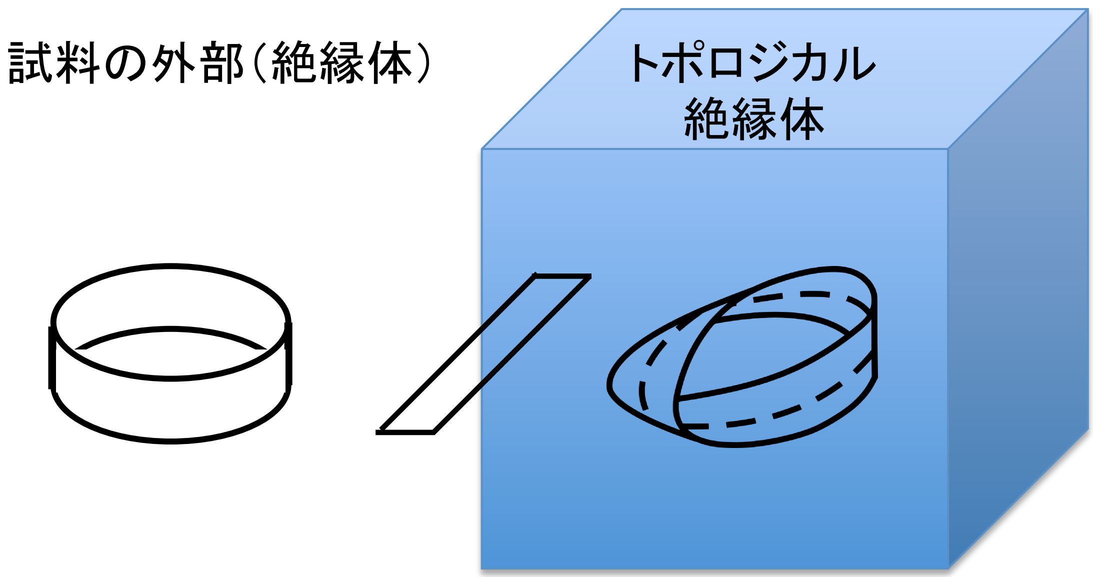
トポロジカル絶縁体を**最も特徴付ける性質**

バルク/境界対応

試料境界にはギャップが閉じた状態が*必ず*存在

一般的証明のエッセンス

M. Sato et. al. ('11)
...etc



試料外部 ⇄ 内部（バルク）; 波動関数のトポロジーが変わっている

∴境界ではギャップが閉じていなければいけない

トポロジカル絶縁体を**最も特徴付ける性質**

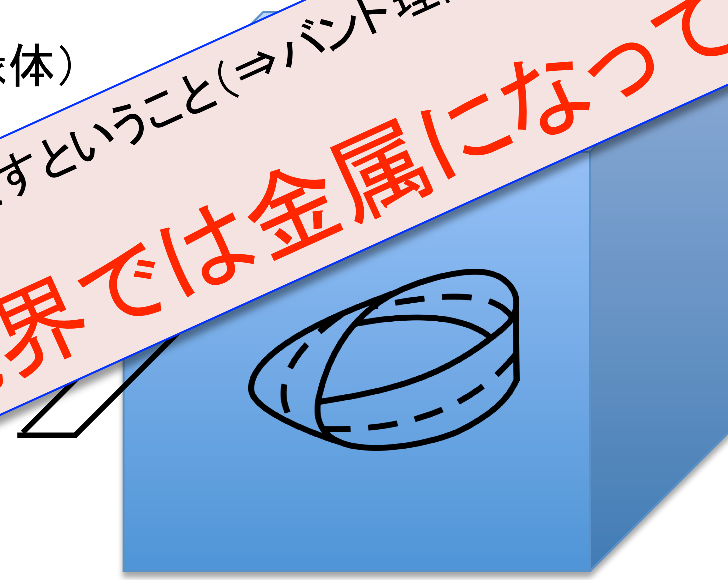
バルク/境界対応

試料境界にはギャップが閉じた状態

一般的証明のエッセンス

M. Sato et. al. ('11)
...etc

試料の外部（絶縁体）



ギャップが閉じているということは，電気を通すということ(⇒バンド理論の紹介）

内部では絶縁体，境界では金属になっている！！

部 ⇄ 内部（バルク）; 波動関数のトポロジーが変わっている

∴境界ではギャップが閉じていなければいけない

トポロジカル超伝導体

トポロジカル絶縁体の超伝導版

○ 超伝導体でも, クーパー対形成によりバルク状態には
エネルギー・ギャップが生じる

○ 絶縁体と同じように...

- バルクの波動関数のトポロジーを議論出来る
- 試料境界に*ギャップレス状態*が現われる（バルク／境界対応）

条件が揃えばマヨラナ状態

トポロジカル絶縁体・超伝導体のタイプ

- Schnyder et al の一般的分類表　Phys. Rev. B **78**, 195125 (2008)

		TRS	PHS	SLS	$d=1$	$d=2$	$d=3$
Standard	A (unitary)	0	0	0	-	$\mathbb{Z}$	-
(Wigner-Dyson)	AI (orthogonal)	+1	0	0	-	-	-
	AII (symplectic)	−1	0	0	-	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$
Chiral	AIII (chiral unitary)	0	0	1	$\mathbb{Z}$	-	$\mathbb{Z}$
(sublattice)	BDI (chiral orthogonal)	+1	+1	1	$\mathbb{Z}$	-	-
	CII (chiral symplectic)	−1	−1	1	$\mathbb{Z}$	-	$\mathbb{Z}_2$
BdG	D	0	+1	0	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}$	-
	C	0	−1	0	-	$\mathbb{Z}$	-
	DIII	−1	+1	1	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}$
	CI	+1	−1	1	-	-	$\mathbb{Z}$

結晶の対称性は乱れにより壊されている, としている

トポロジカル絶縁体・超伝導体のタイプ

- Schnyder et al の一般的分類表 Phys. Rev. B **78**, 195125 (2008)

		TRS				$d=2$	$d=3$
Standard	A (unitary)	0	0	0	-	$\mathbb{Z}$	-
(Wigner-Dyson)	AI (orthogonal)	+1				-	-
	AII (symplectic)	−1				$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$
Chiral	AIII (chiral unitary)	0	0		$\mathbb{Z}$	-	-
(sublattice)	BDI (chiral orthogonal)	+1	+1		$\mathbb{Z}$	-	-
	CII (chiral symplectic)	[illegible]	[illegible]	[illegible]	$\mathbb{Z}$	-	$\mathbb{Z}_2$
BdG	D	0	+1		$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}$	-
	C	0	−1		-	$\mathbb{Z}$	-
	DIII	−1	+1		$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}$
	CI	+1	−1		-	-	$\mathbb{Z}$

量子ホール
(スピンフル)カイラルp

量子スピンホール

グラフェン

3次元$\mathbb{Z}_2$

(スピンレス)カイラルp

^{3}He-B

カイラルd

ヘリカルp

...etc

結晶の対称性は乱れにより壊されている, としている

SLS; ハミルトニアンと反交換する
ユニタリ行列が存在する対称性.
Dirac 理論のγ_5行列から来ている.

前のスライドの表のキャプション

TABLE I. Ten symmetry classes of single-particle Hamiltonians classified in terms of the presence or absence of time-reversal symmetry (TRS) and particle-hole symmetry (PHS), as well as "sublattice" (or "chiral") symmetry (SLS) (Refs. 37 and 38). In the table, the absence of symmetries is denoted by "0." The presence of these symmetries is denoted by either "+1" or "−1," depending on whether the (antiunitary) operator implementing the symmetry at the level of the single-particle Hamiltonian squares to "+1" or "−1" (see text). [The index ±1 equals η_c in Eq. (1b); here $\epsilon_c = +1$ and −1 for TRS and PHS, respectively.] For the first six entries of the table (which can be realized in nonsuperconducting systems), TRS = +1 when the SU(2) spin is an integer [called TRS (even) in the text] and TRS = −1 when it is a half-integer [called TRS (odd) in the text]. For the last four entries, the superconductor "Bogoliubov–de Gennes" (BdG) symmetry classes D, C, DIII, and CI, the Hamiltonian preserves SU(2) spin-1/2 rotation symmetry when PHS = −1 [called PHS (singlet) in the text], while it does not preserve SU(2) when PHS = +1 [called PHS (triplet) in the text]. The last three columns list all topologically non-trivial quantum ground states as a function of symmetry class and spatial dimension. The symbols $\mathbb{Z}$ and $\mathbb{Z}_2$ indicate whether the space of quantum ground states is partitioned into topological sectors labeled by an integer or a $\mathbb{Z}_2$ quantity, respectively.

目次

イントロダクション

- “バルク/境界対応”

トポロジカル絶縁体

- 量子ホール絶縁体（ベースとなる系）
- Z_2トポロジカル絶縁体（時間反転対称な系への拡張）
- ３次元への拡張

トポロジカル超伝導体（超伝導体へのアナロジー）

- カイラルp-波超伝導
- ヘリカルp-波超伝導
- ３次元への拡張
- マヨラナ状態

ギャップレスの系への拡張

補足ノート（板書予定）
A: ホール伝導度とチャーン数
B: クラマース縮退
C: マヨナラ状態

目次

イントロダクション

- “バルク/境界対応”

トポロジカル絶縁体

- 量子ホール絶縁体（ベースとなる系）
- Z_2トポロジカル絶縁体（時間反転対称な系への拡張）
- ３次元への拡張

トポロジカル超伝導体（超伝導体へのアナロジー）

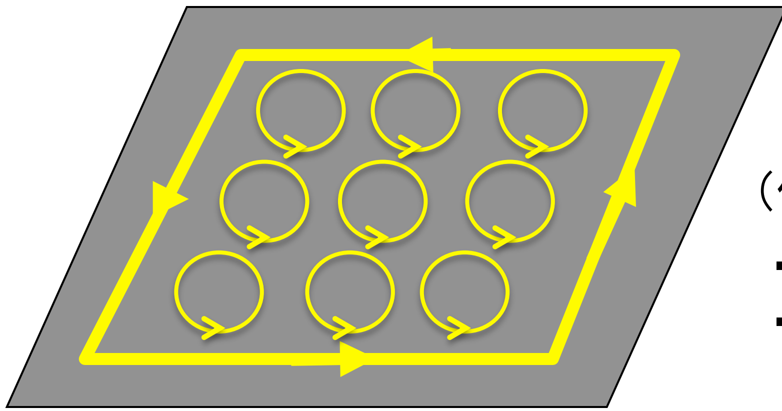
- カイラルp-波超伝導
- ヘリカルp-波超伝導
- ３次元への拡張
- マヨラナ状態

ギャップレスの系への拡張

補足ノート（板書予定）
A: ホール伝導度とチャーン数
B: クラマース縮退
C: マヨナラ状態

トポロジカル絶縁体の“基本型”

量子ホール絶縁体



（例; ２次元電子系＋磁場）

・ランダウ準位によるギャップ
・サイクロトロン運動

カイラル・エッジ状態で
特徴付けられる

*) 一方通行

時間反転(t→-t)を破る

∵ 右回り → 左回り
t→-t

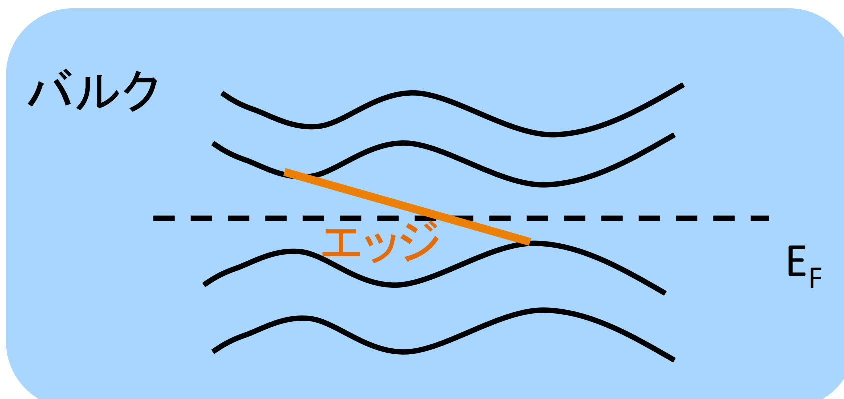
はじめに
カイラル・エッジ状態ありき
で考える

何が起こるか？

カイラル・エッジ状態

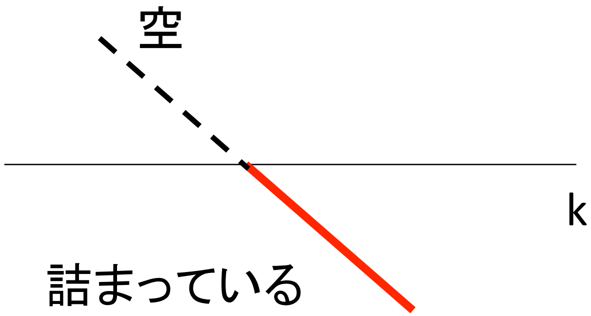
一方通行 → スペクトルは単調な*)関数

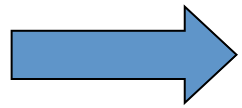
→ フェルミレベルを絶対によぎる
i.e. 金属的(ギャップレス)



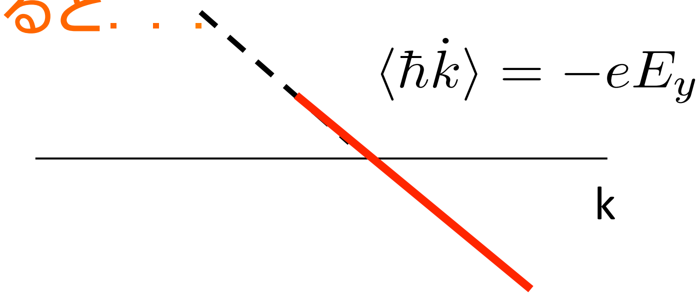
*) 必ずしも単調でなくてもよい
両端が上下に抜けていれば良い

カイラル・エッジ状態が1本あると, なにが起こる？



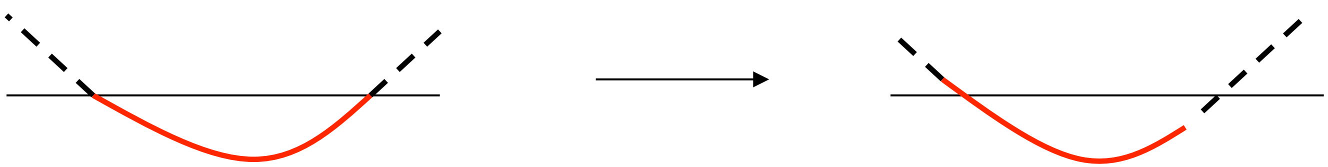


電場をエッジに並行に
かけると. . .



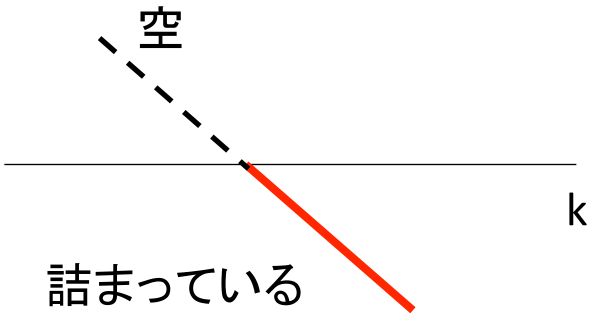
詰まっている状態の数が変化！

Cf)ふつうの金属

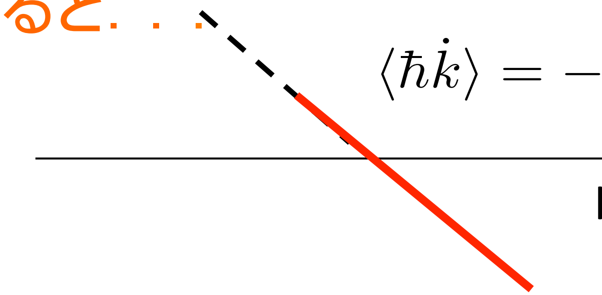


詰まっている状態数に変化は無い

カイラル・エッジ状態が1本あると, なにが起こる？



電場をエッジに並行に
かけると. . .



$$\langle \hbar \dot{k} \rangle = -eE_y$$

詰まっている状態の数が変化！

電荷の増分

(単位時間,単位長さあたり)

$$\dot{Q}_{edge} = -\frac{e^2}{2\pi\hbar} E_y \neq 0$$

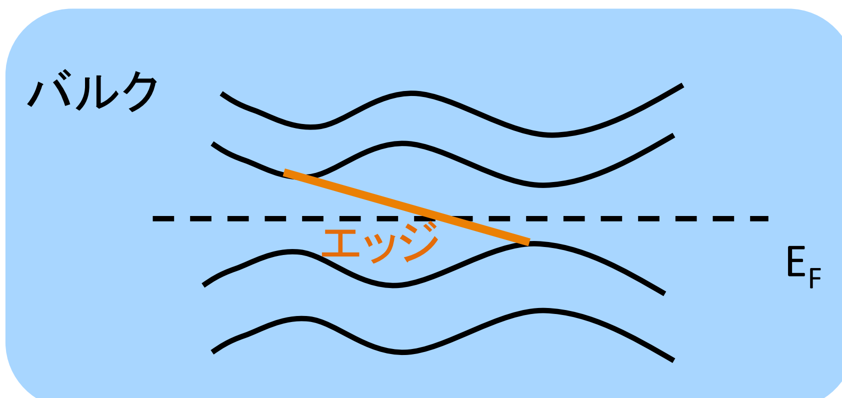
エッジ状態*だけ*を考えると、電荷が『***保存しない***』ように見える

(一次元ディラック電子系のカイラル・アノマリー)

Adler-Bell-Jackiw
Nielsen-Ninomiya...etc

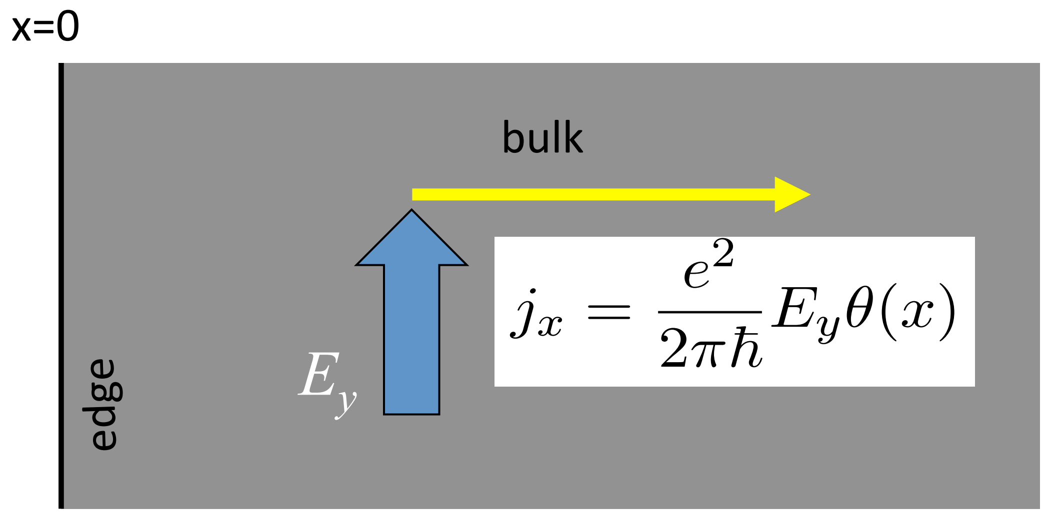
ゲージ対称性から『**電荷は*<u>必ず</u>*保存するはず**』

バルクから補完される



どのように補完？ ⇒ バルクに量子ホール伝導度

$$\dot{Q}_{edge} = -\frac{e^2}{2\pi\hbar}E_y \neq 0$$



バルク内の電荷保存則

$$\dot{\rho}_e = \frac{d}{dx}j_x = \frac{e^2}{2\pi\hbar}E_y\delta(x)$$

バルクからエッジへ運ばれる電荷量

(単位時間, 単位長さあたり)

$$\dot{Q}_{bulk} = \int dx \frac{d}{dx}j_x = \frac{e^2}{2\pi\hbar}E_y$$

$$\therefore\ \dot{Q}_{edge} + \dot{Q}_{bulk} = 0$$

エッジ・モードのアノマリをちょうど相殺

すなわち…

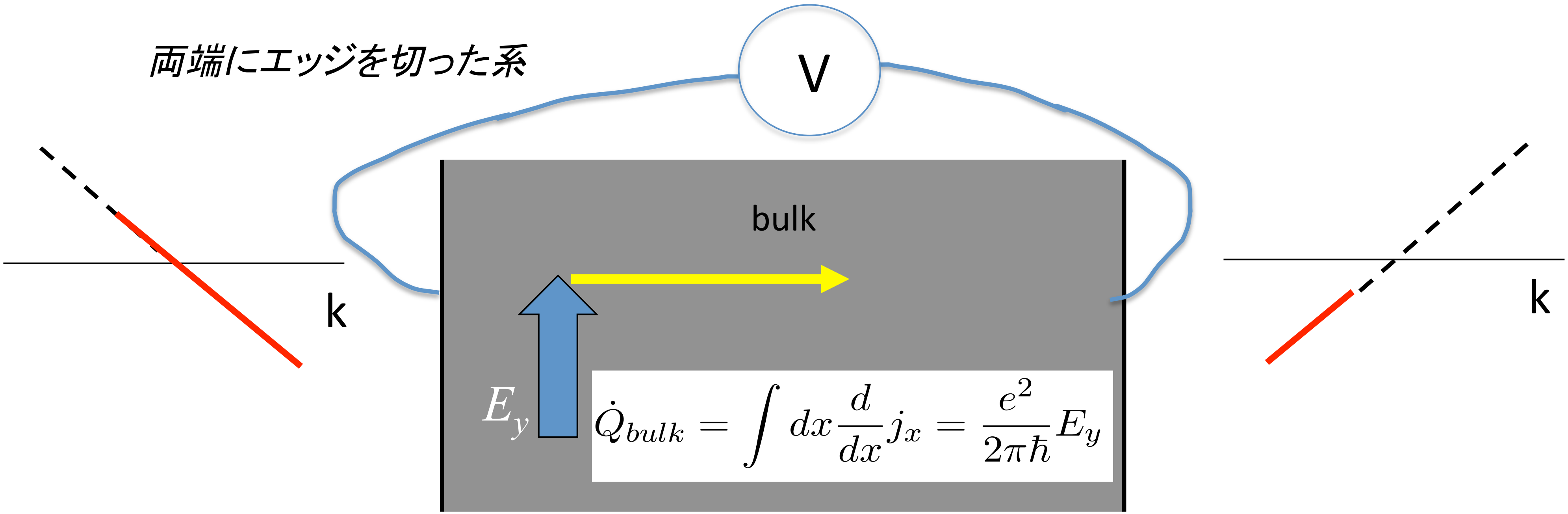
カイラル・エッジ状態 ⟺ バルクに量子ホール伝導度

電荷保存則

X. G. Wen, PRL (1991)
Hatsugai, J.Phys.CM(1991)

（補足）量子ホール効果の導出

両端にエッジを切った系



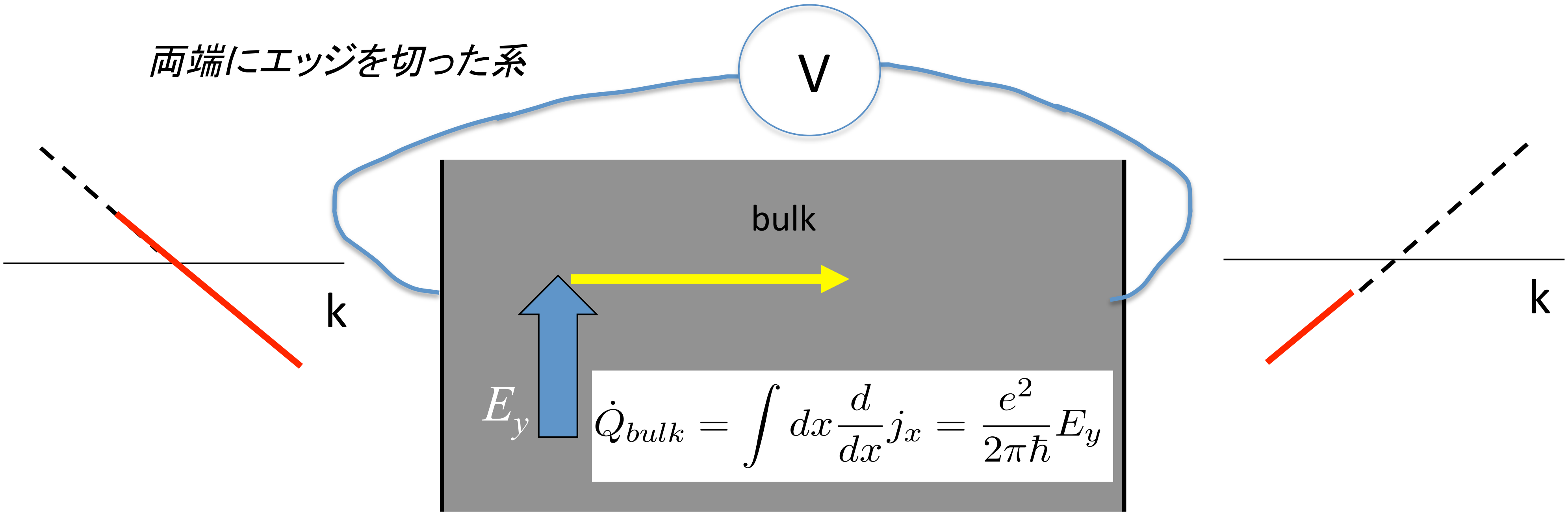
- 左右のエッジ間で電荷輸送 ⇒ 電位 V が発生
- 左右のエッジ電流キャンセルしない ⇒ 正味の電流 J_y
- 電荷輸送で蓄えられる単位時間あたりのエネルギー $\Delta \dot{E} = \dot{Q}_{bulk} V = \frac{e^2}{2\pi\hbar} E_y V$
- 電流 J_y によるパワー・ロス $P = J_y E_y$

$$\Delta \dot{E} = P \Rightarrow J_y = \frac{e^2}{2\pi\hbar} V$$

量子ホール効果

（補足）量子ホール効果の導出

両端にエッジを切った系



$$\dot{Q}_{bulk} = \int dx \frac{d}{dx} j_x = \frac{e^2}{2\pi\hbar} E_y$$

注）

- ホール電圧が一定の状態 ($E_y=0$) は, 散逸なし.
- E_yはホール電場ではない

- 電流 J_y によるパワー・ロス　　$P = J_y E_y$

$$\Delta \dot{E} = P \Rightarrow J_y = \frac{e^2}{2\pi\hbar} V$$

量子ホール効果

トポロジーとの関連

断熱近似の導出
拙著; 物性研究
講義ノート('07)('11)

量子ホール伝導度(久保公式 or 断熱近似で導出)

Thouless-Kohmoto-Nightingale-den Nijs, PRL 1981, Kohmoto, Ann. Phys. 1985

$$\sigma_{xy} = \frac{e^2}{2\pi\hbar} \int_{BZ} \frac{d^2k}{2\pi i} \boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{k}} \times \langle u_{\boldsymbol{k}} | \boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{k}} | u_{\boldsymbol{k}} \rangle$$

チャーン数 = 0, ±1, ±2…

ブリルアン・ゾーン(トーラス)上で定義されるトポロジカルな整数

バルクのブロッホ状態 $|u_k>$ の渦度

- バルクのエネルギー・ギャップが閉じない限り, ホール伝導度は不変

  ⇒摂動に対して頑強

- ギャップをつぶして変化させたとしても, とびとびの変化のみ許される

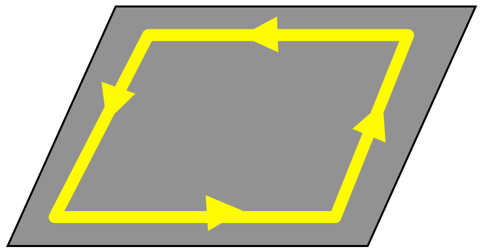
  ⇒量子化

- チャーン数の値がカイラルエッジ状態の数を与える

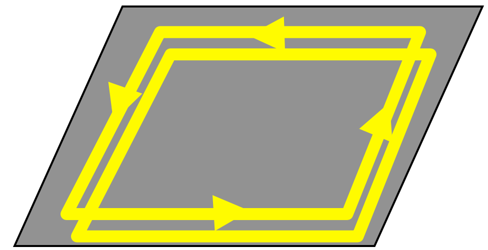
バルク/境界対応

X. G. Wen, PRL (1991)
Hatsugai, J.Phys.CM(1991)

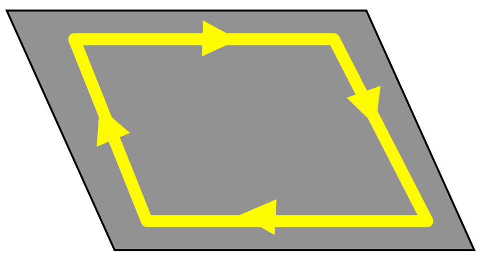
N=1



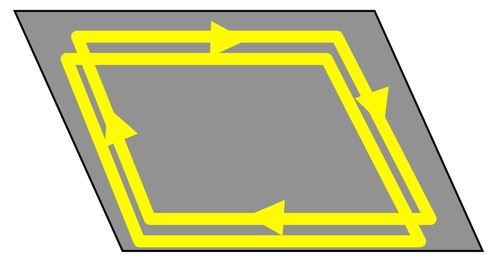
N=2



N=-1



N=-2



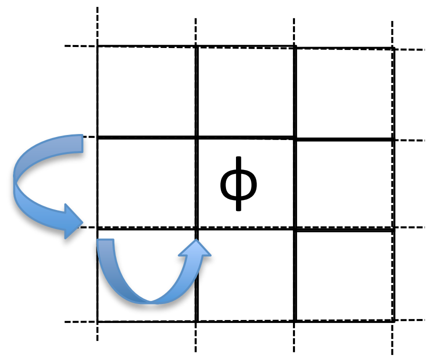
量子ホール絶縁体の模型

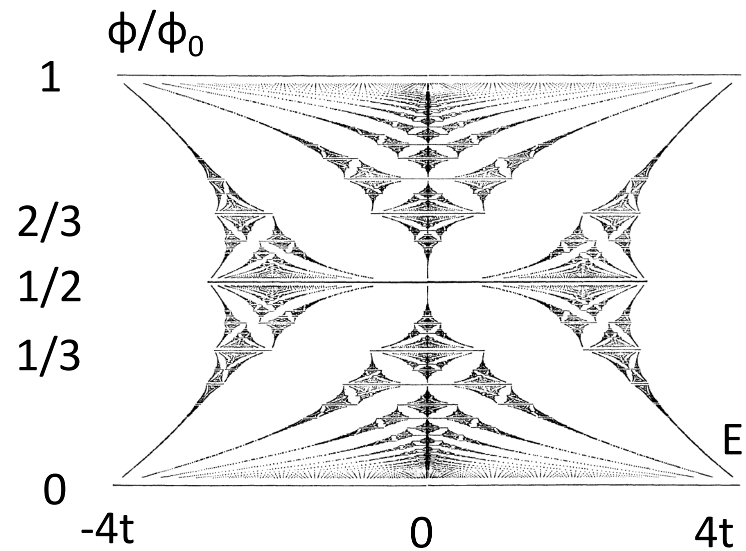
- Hofstadter 模型 Phys. Rev. B14 (1976) 2239
- Haldane 模型 Phys. Rev. Lett. 61 (1988) 2015

• Hofstadter 模型　Phys. Rev. B14 (1976) 2239

磁場中2次元電子系の強束縛模型

電子の飛び移り t



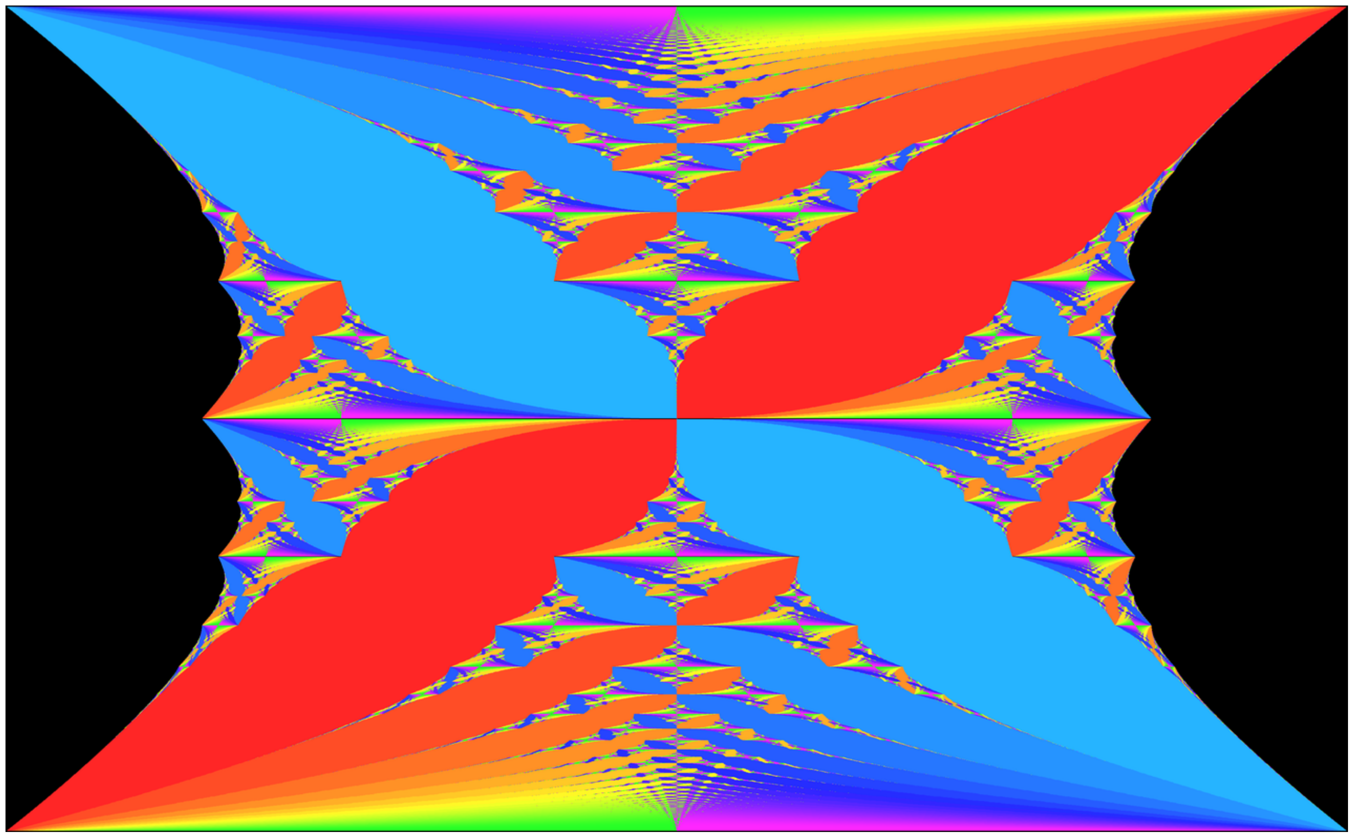


正方格子の場合の結果

分裂したバンドがフラクタル構造！！

- $\phi = p/q\ \phi_0$ (p,qは互いに素) のとき, q 倍周期
  ⇒ エネルギー・バンドが q 本に分裂
  ⇒ *Hofstadter butterfly!!*
- 分裂したバンドが チャーン数 を持つ
- バンド・ギャップ内にフェルミ・レベル
  ⇒ ホール伝導度の量子化

Hofstadter butterfly と量子ホール伝導度

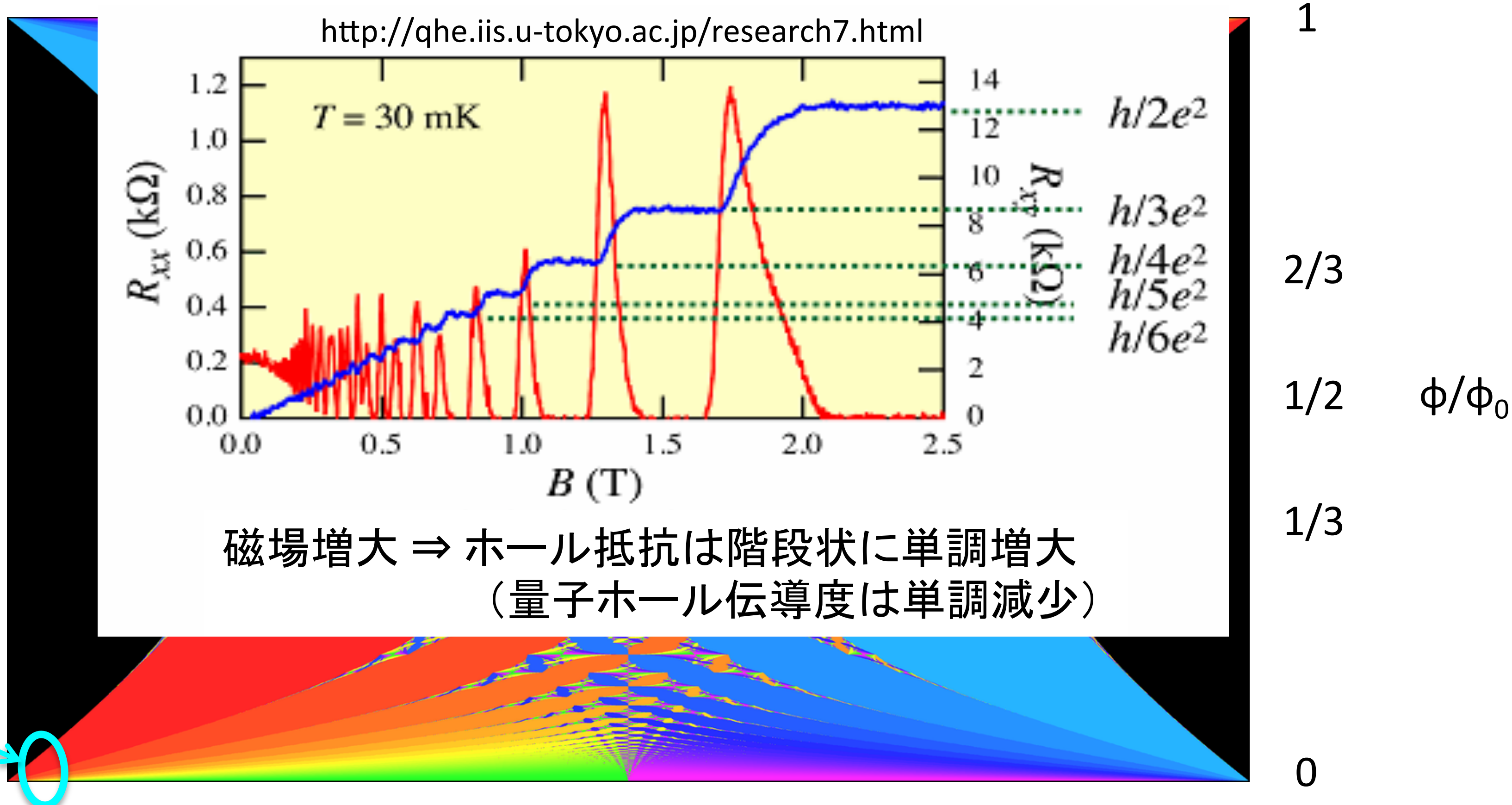


Daniel Osadchy's home page: http://physics.technion.ac.il/~odim/hofstadter.html

- ギャップが空いている領域についている色が, ホール伝導度の量子化整数を表している

暖(寒)色が正(負)の整数

Hofstadter butterfly と量子ホール伝導度



実験(GaAs)で観測されている領域

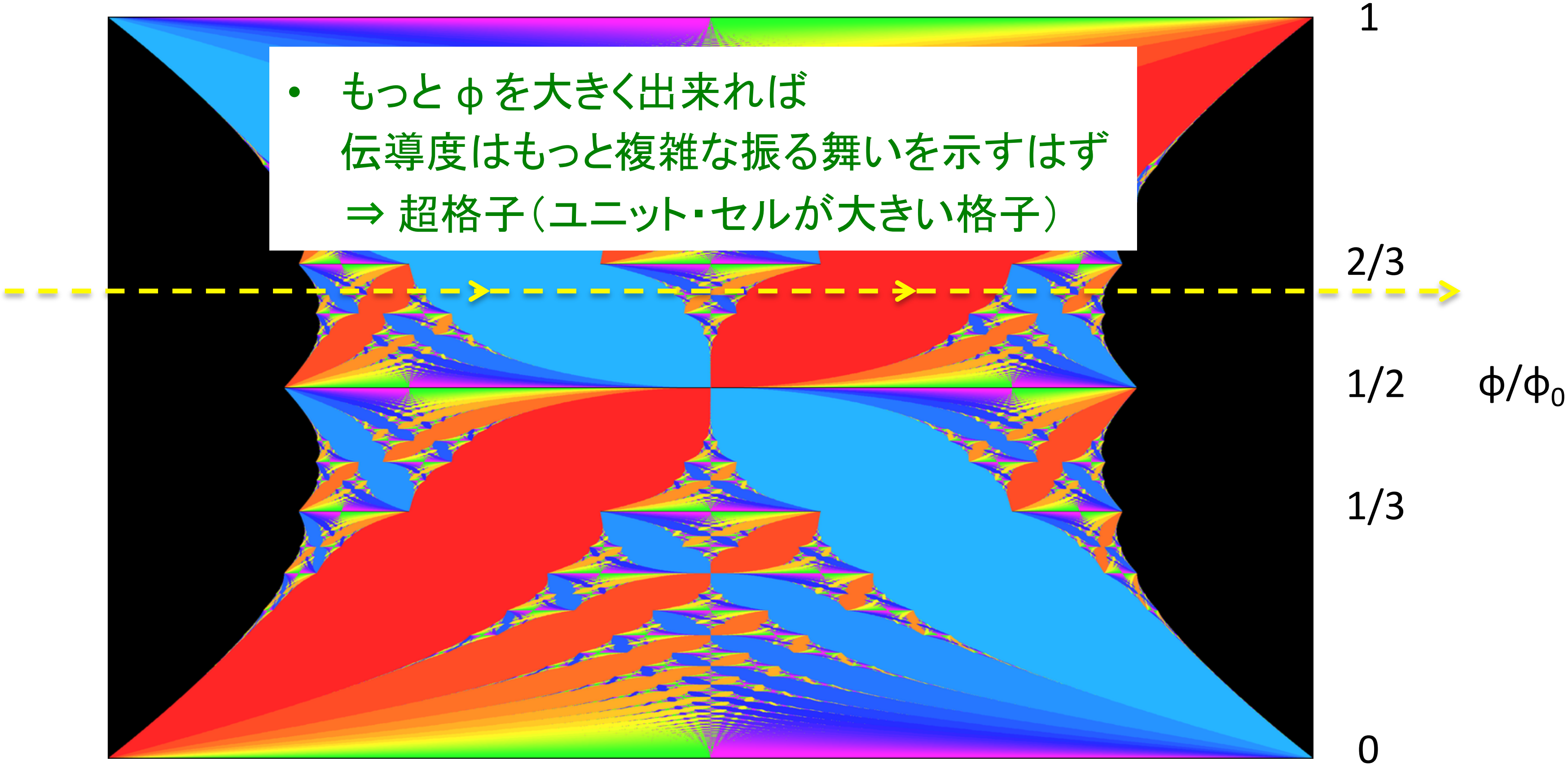
- バンド・ボトム
- ϕ が微小 (結晶格子が小さいため)

Daniel Osadchy's home page: http://physics.technion.ac.il/~odim/hofstadter.html

- ギャップが空いている領域についている色が, ホール伝導度の量子化整数を表している

暖(寒)色が正(負)の整数

Hofstadter butterfly と量子ホール伝導度

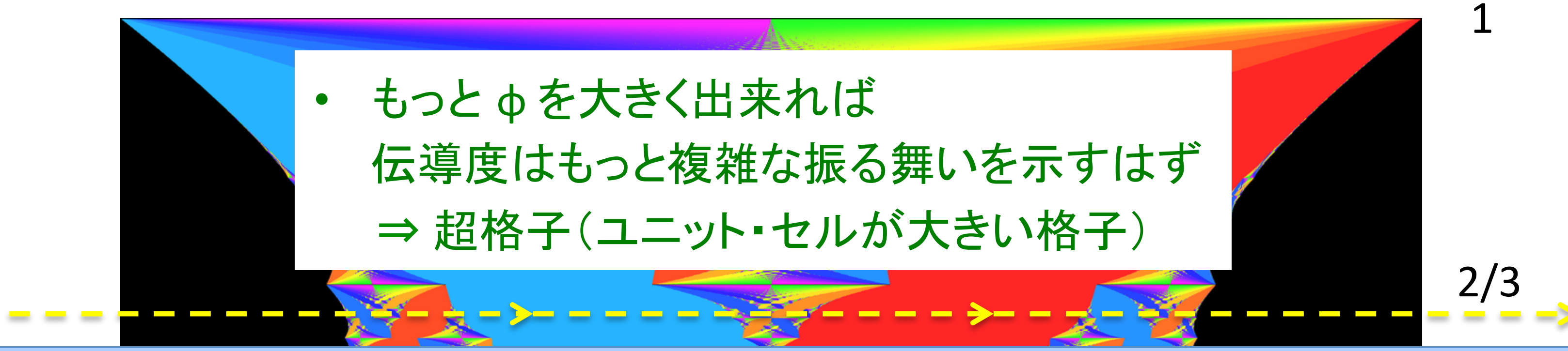


Daniel Osadchy's home page: http://physics.technion.ac.il/~odim/hofstadter.html

- ギャップが空いている領域についている色が, ホール伝導度の量子化整数を表している

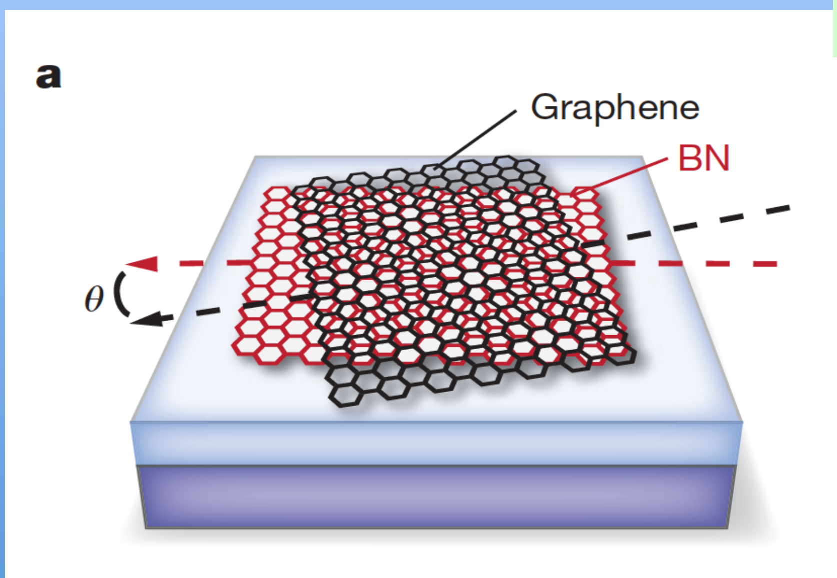
暖(寒)色が正(負)の整数

Hofstadter butterfly と量子ホール伝導度

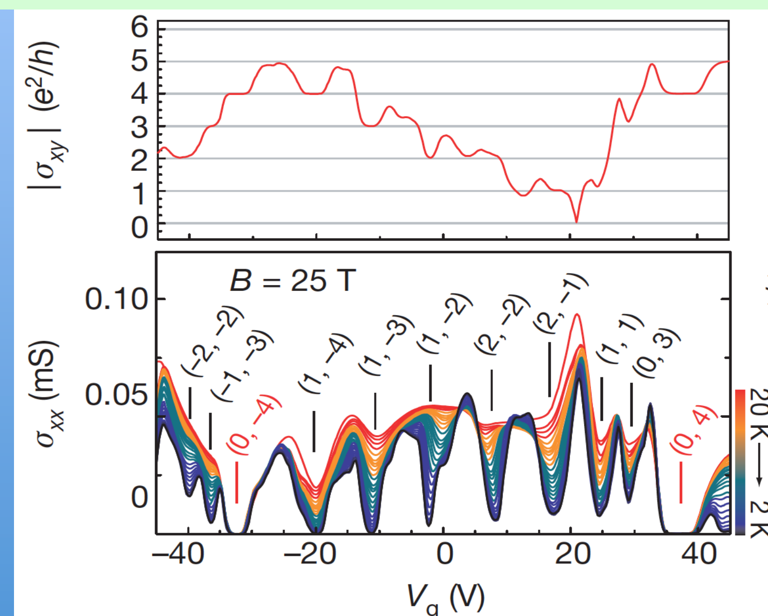


- もっと φ を大きく出来れば
  伝導度はもっと複雑な振る舞いを示すはず
  ⇒ 超格子（ユニット・セルが大きい格子）

Graphane と BN を用いた超格子上の量子ホール効果　　C.R. Dean et al. Nature 497 (2013) 598

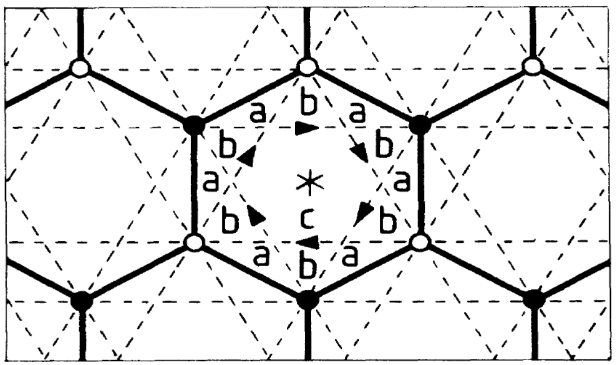


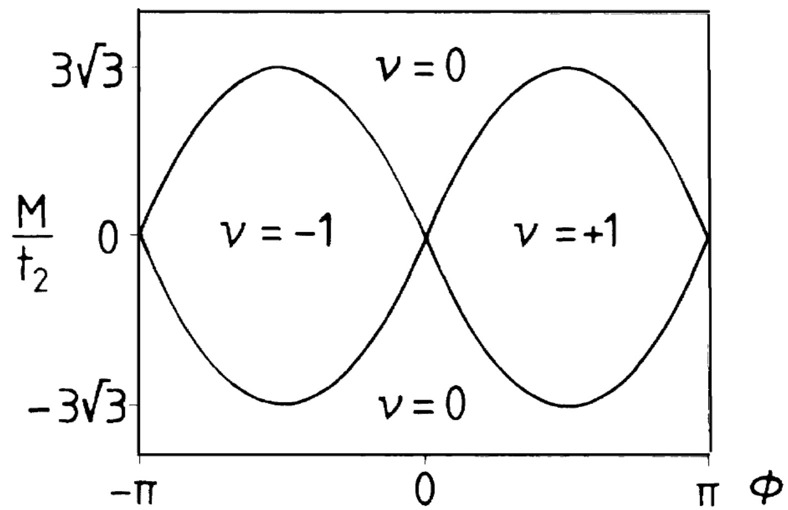
フェルミ・レベルの変化に対し複雑な挙動



• Haldane 模型　Phys. Rev. Lett. 61 (1988) 2015

蜂の巣格子上のスピン偏極電子 + 交替磁場





・a と bでフラックスの向きが逆 (net でゼロ)

∴並進対称性変わらない

⇒ band 分裂なし (2 band のまま). 蝶は出てこない

・スピン偏極により時間反転の破れ⇒チャーン数

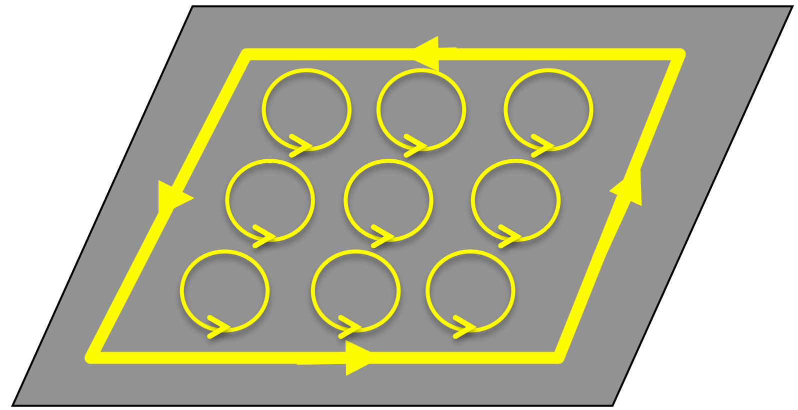
ν; チャーン数
ϕ; a を通るフラックス
M; 交替ポテンシャル

$$\mathbf{H}(\mathbf{k}) = 2t_2\cos\phi\left[\sum_i \cos(\mathbf{k}\cdot\mathbf{b}_i)\right]\mathbf{I} + t_1\left[\sum_i [\cos(\mathbf{k}\cdot\mathbf{a}_i)\boldsymbol{\sigma}^1 + \sin(\mathbf{k}\cdot\mathbf{a}_i)\boldsymbol{\sigma}^2]\right] + \left[M - 2t_2\sin\phi\left(\sum_i \sin(\mathbf{k}\cdot\mathbf{b}_i)\right)\right]\boldsymbol{\sigma}^3$$

一旦まとめると…

量子ホール絶縁体(チャーン絶縁体)

- トポロジカル絶縁体の一番簡単な例
- カイラル・エッジ状態の存在が特徴



電荷保存則

カイラル・エッジ状態の数 ⟺ 量子化ホール伝導度

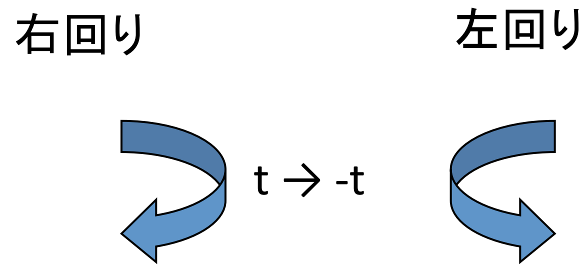
バルク/境界対応

久保公式 or 断熱近似

バルクの波動関数のトポロジー(チャーン数)

拡張

量子ホール絶縁体は
<u>時間反転対称性を破る</u>



→ ***<u>破らない場合への拡張</u>***は
可能か？

時間反転対称なトポロジカル絶縁体

Kane & Mele, PRL2005, PRL2005

最も簡単な拡張

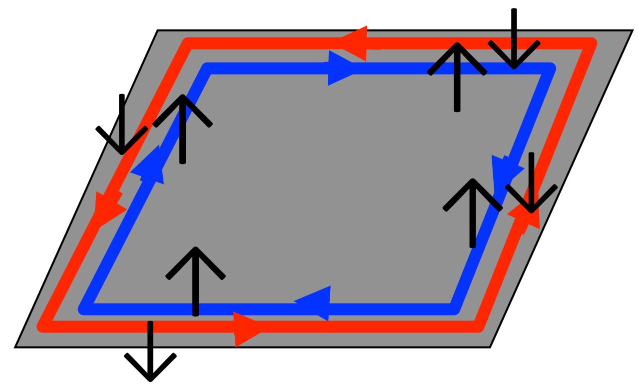
スピン↑を持つ電子と, スピン↓を持つ電子が独立な場合

i.e.スピン S_z が保存する場合

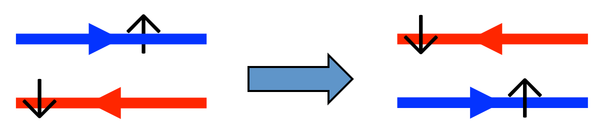
ヘリカル・エッジ状態

(↑と↓で互いに逆回りの対)

を持つ絶縁体



∵ 時間反転変換(t → -t);



電子の流れとスピンの向きが同時に入れ替わる

∴確かに時間反転対称

量子ホール絶縁体とおなじ議論を繰り返すと…

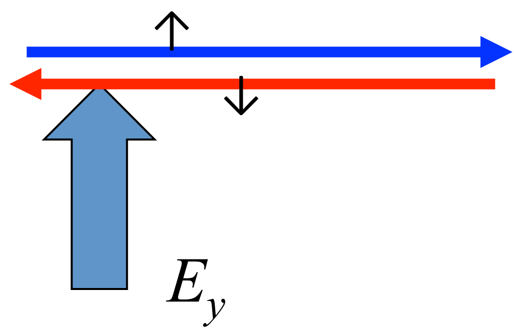
スピン↑と↓で逆向きの量子ホール効果

量子スピンホール効果

Kane & Mele, PRL2005, PRL2005

$$J_x^{spin} \equiv \frac{\hbar}{2e}\left(J_x^{\uparrow} - J_x^{\downarrow}\right) = \frac{\hbar}{2e}\left\{\frac{e^2}{2\pi\hbar} - \left(-\frac{e^2}{2\pi\hbar}\right)\right\}E_y$$

$$= \frac{e}{2\pi}E_y$$



Cf)スピンホール効果

Murakami-Nagaosa-Zhang, Science 2003

の量子化バージョン

トポロジーとの関連 (S_z 保存するとき)

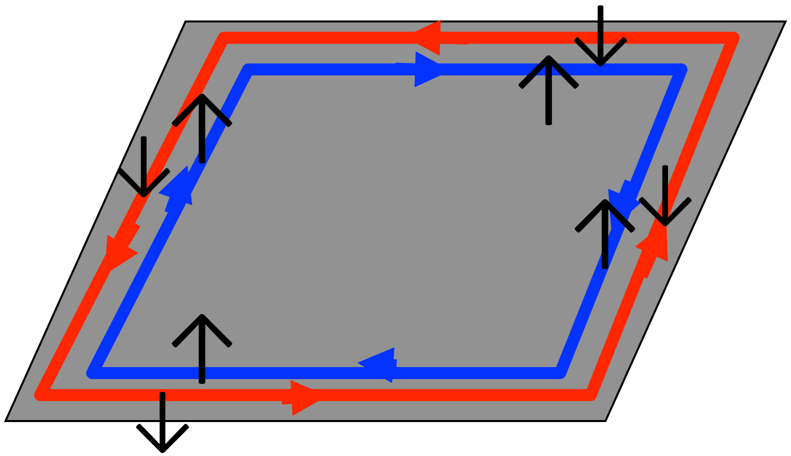
量子ホール絶縁体とまったくパラレル

量子スピンホール伝導度（久保公式 or 断熱近似）

スピン・チャーン数 = 0, ±1, ±2...

Sheng-Weng-Sheng-Haldane, PRL 2006

- $|u_k\uparrow\rangle$ と $|u_k\downarrow\rangle$ のチャーン数の差 → ***整数値***
- スピン・チャーン数がヘリカル状態の数を与える
  (バルク・境界対応)



= 量子スピンホール絶縁体
(量子ホール絶縁体x2)

S_zの保存則

ヘリカル・エッジ状態の数 ⟺ 量子化スピンホール伝導度

バルク/境界対応

久保公式 or 断熱近似

バルクの波動関数のトポロジー（スピン・チャーン数）

量子ホール絶縁体と似た構造

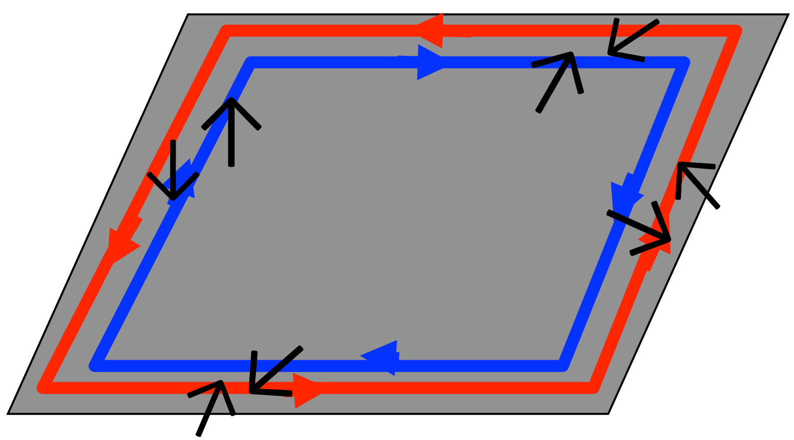
さらに拡張⇒ S_z が保存しない場合

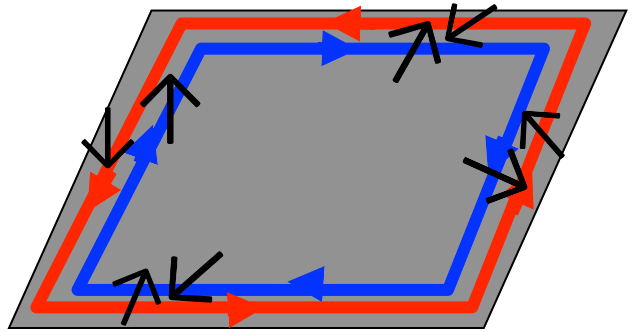
Kane & Mele PRL2005, PRL2005

電荷と違い, S_zは一般に保存しない

$$\boldsymbol{L}\cdot\boldsymbol{S} = \underline{L_x S_x + L_y S_y} + L_z S_z$$

↑と↓を混ぜる相互作用





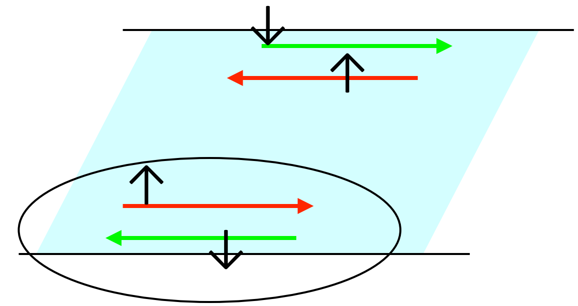
スピン非保存の相互作用を入れて行くと…

- スピン・カレントが定義出来なくなり、
- 量子スピンホール効果は起こらなくなる
- しかし、ヘリカル・エッジ状態は<u>*条件付き(*)で生き残る*</u>

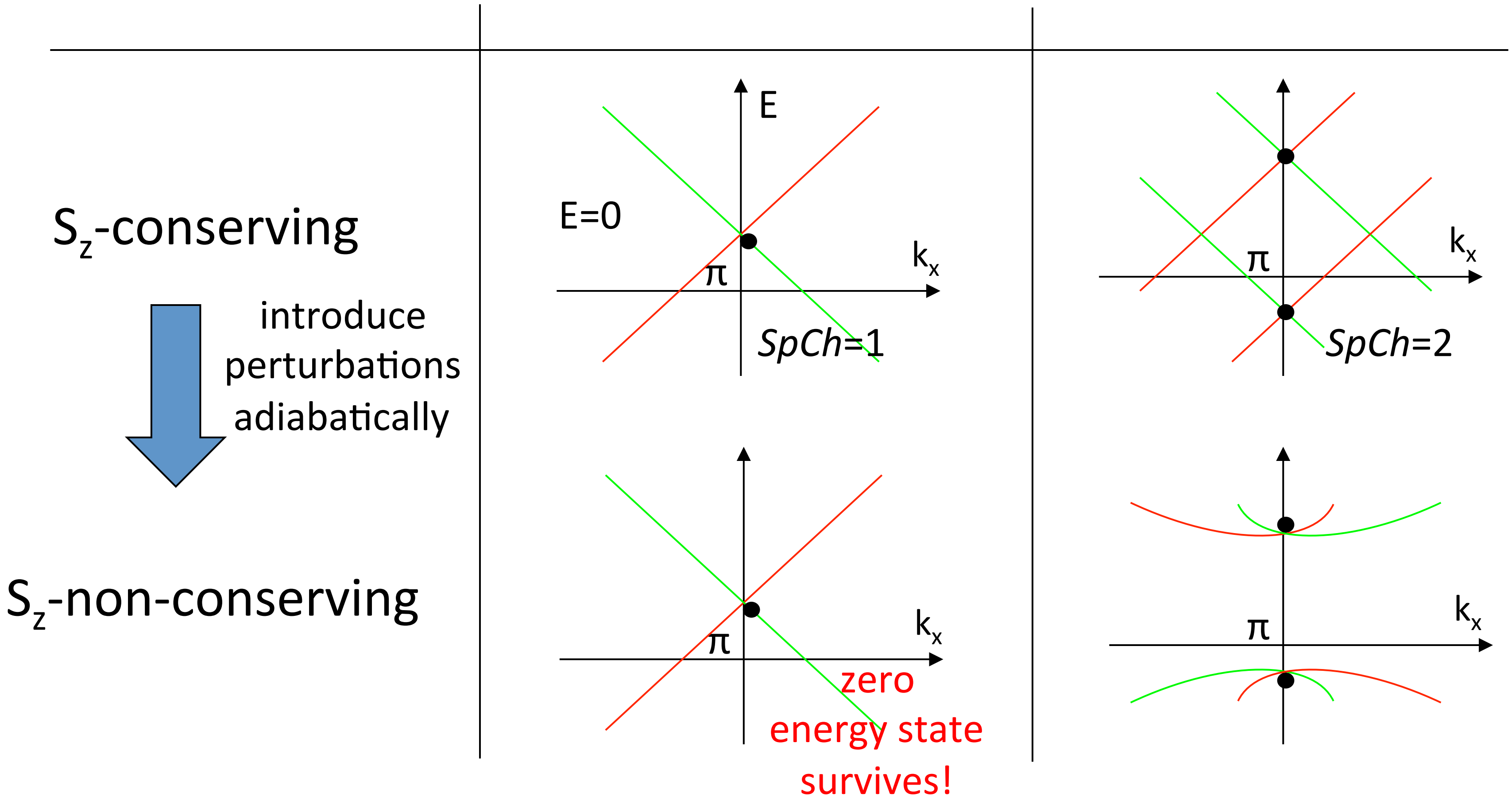
(*)スピンが保存しているときのエッジ状態の数(スピン・チャーン数)

スピン保存		スピン非保存
奇数	→	生き残る
偶数	→	残らない

Edge spectrum and Z_2 classification



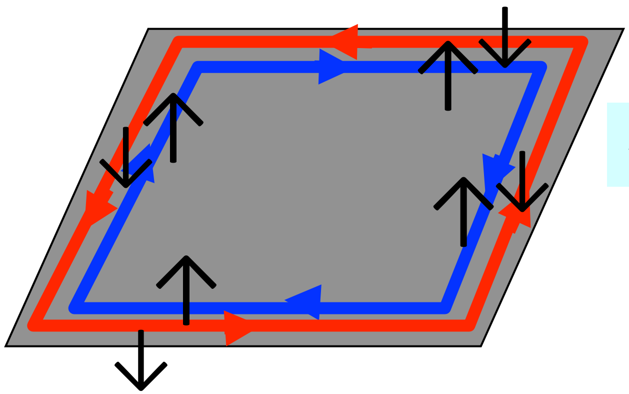
Note) Zone center $k_x = \pi$ is T-inv. point,
and we *must* have ***Kramers degeneracy***.



$$\boxed{Z_2 = (-1)^{SpCh}}$$

"Parity" of *SpCh*

スピン S_z 保存



スピン S_z の保存則

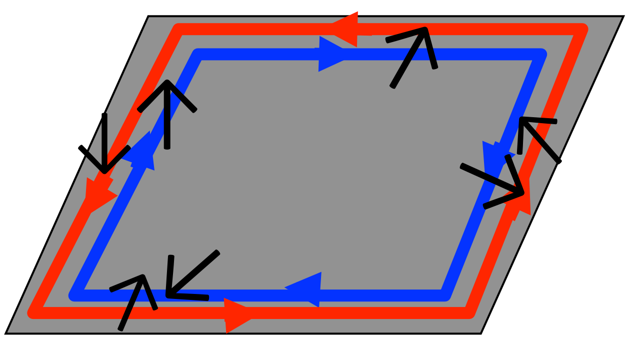
ヘリカル・エッジ状態の数 ⇔ 量子スピンホール伝導度

バルク/境界対応

久保公式 or 断熱近似

バルクの波動関数のトポロジー（スピン・チャーン数）

S_z非保存



ヘリカル・エッジ状態の有無

バルク/境界対応

バルクの状態のZ$_2$数
(スピンチャーン数の偶奇)

- 量子スピンホール効果は起こらない

さらにさらに拡張（3次元へ）

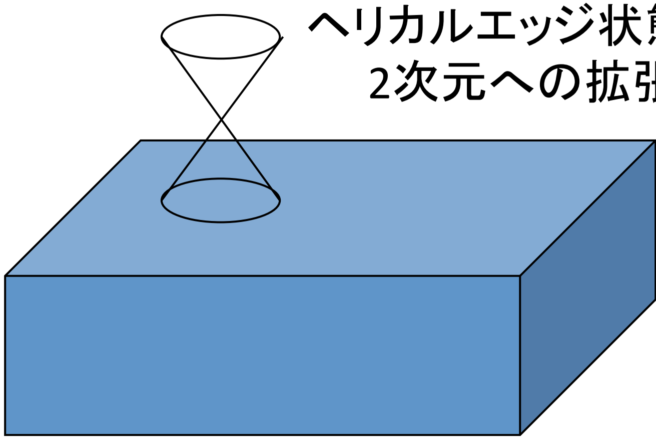
- Schnyder et al の一般的分類表 Phys. Rev. B **78**, 195125 (2008)

		TRS	PHS	SLS	$d=1$	$d=2$	$d=3$
Standard	A (unitary)	0	0	0	-	QH $\mathbb{Z}$	-
(Wigner-Dyson)	AI (orthogonal)	+1	0	0	-	-	-
	AII (symplectic)	−1	0	0	-	QSH $\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$
Chiral	AIII (chiral unitary)	0	0	1	$\mathbb{Z}$	-	$\mathbb{Z}$
(sublattice)	BDI (chiral orthogonal)	+1	+1	1	$\mathbb{Z}$	-	-
	CII (chiral symplectic)	−1	−1	1	$\mathbb{Z}$	-	$\mathbb{Z}_2$
BdG	D	0	+1	0	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}$	-
	C	0	−1	0	-	$\mathbb{Z}$	-
	DIII	−1	+1	1	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}$
	CI	+1	−1	1	-	-	$\mathbb{Z}$

結晶の対称性は乱れにより壊されている, としている

さらにさらに拡張（3次元へ）

Fu-Kane PRB 2007, Qi-Hughes-Zhang PRB 2008, Science 2009



4つのZ_2トポロジカル数 $(\nu_0; \nu_1, \underbrace{\nu_2, \nu_3}_{3つの2次元Z_2数})$

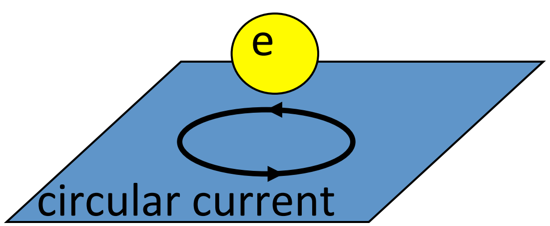
ν_0; 時間反転対称点におけるブロッホ状態のパリティの積

ν_0=-1 だと
Dirac cone が必ず1個残る

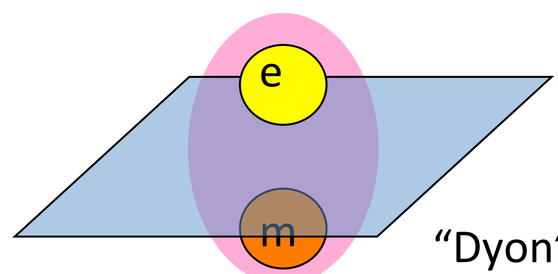
2次元ディラック粒子の
Parity Anomaly

無限小の
磁気的摂動を印加...

∴half quantized Hall Effect @ surface



=



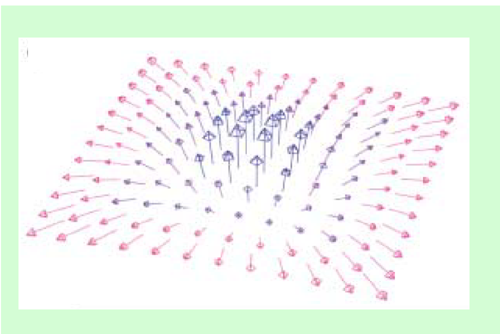
（補）２次元のディラック粒子とパリティ･アノマリー

$$\mathcal{H}_{\boldsymbol{k}}\psi_{\boldsymbol{k}} = E_{\boldsymbol{k}}\psi_{\boldsymbol{k}}$$

(定常状態のDirac eq.)

$$\begin{cases} \mathcal{H}_{\boldsymbol{k}} = \boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{d}_{\boldsymbol{k}} \\ \boldsymbol{d}_{\boldsymbol{k}} = (k_x, k_y, m) \end{cases}$$

Non-zero *m* ***breaks***
TRS and also Parity



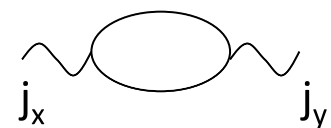
“melon”, a half of hedgehog

KUBO formula（断熱近似でも良い）

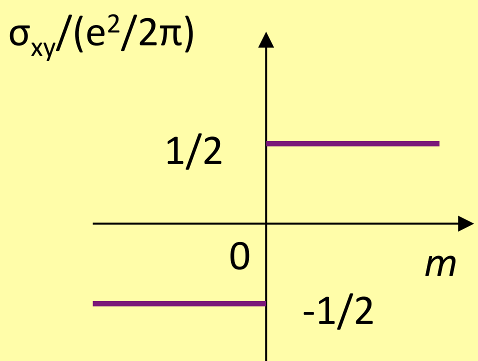
$$\begin{aligned}\sigma_{xy} &= \frac{\partial}{\partial\omega}\pi_{xy}(\omega,\boldsymbol{q})|_{\omega=0,\boldsymbol{q}=0} \\ &= \frac{e^2}{8\pi^2}\int_{\underline{R^2}} d^2k\,\hat{\boldsymbol{d}}_{\boldsymbol{k}}\cdot\partial_x\hat{\boldsymbol{d}}_{\boldsymbol{k}}\times\partial_y\hat{\boldsymbol{d}}_{\boldsymbol{k}} \\ &= \frac{1}{\underline{2}}\frac{e^2}{2\pi}\frac{m}{\underline{|m|}}\end{aligned}$$

non-compact

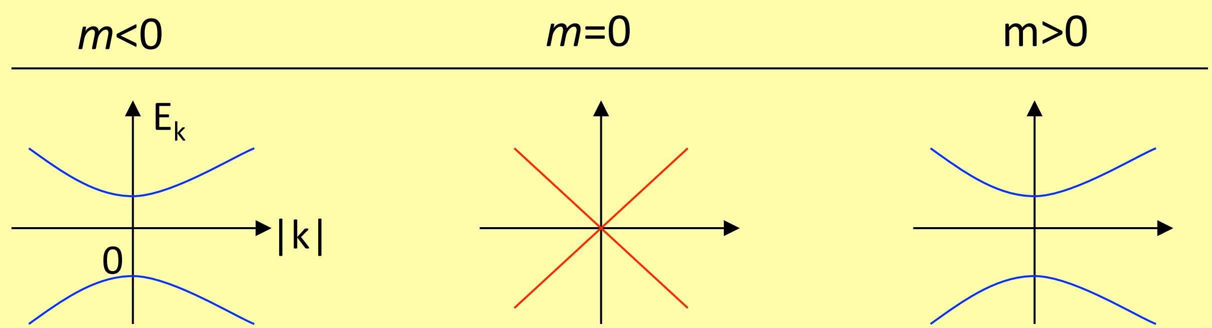
π_{xy};



Niemi-Semenoff PRL83
Redlich PRL84
Ishikawa PRL84
Semenoff PRL85
Haldane PRL88
Bernevig etal, Science06…etc



parity anomaly



Dirac cone

（補）2次元のディラック粒子とパリティ・アノマリー

$$\mathcal{H}_{\boldsymbol{k}}\psi_{\boldsymbol{k}} = E_{\boldsymbol{k}}\psi_{\boldsymbol{k}}$$

(定常状態のDirac eq.)

$$\begin{cases} \mathcal{H}_{\boldsymbol{k}} = \boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{d}_{\boldsymbol{k}} \\ \boldsymbol{d}_{\boldsymbol{k}} = \ldots \end{cases}$$

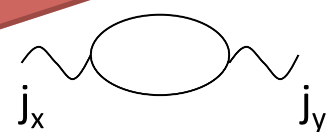
ks

y

Dirac cone 一個あたり,
ちょっとでもギャップを空けると
半整数の量子ホール伝導度が発生！！

“melon”, a

σ_{xy}

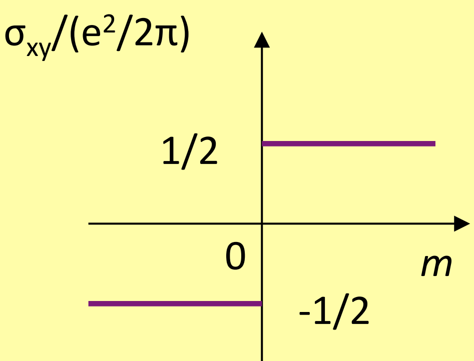


$$\ldots \cdot \partial_x \hat{\boldsymbol{d}}_{\boldsymbol{k}} \times \partial_y \hat{\boldsymbol{d}}_{\boldsymbol{k}}$$

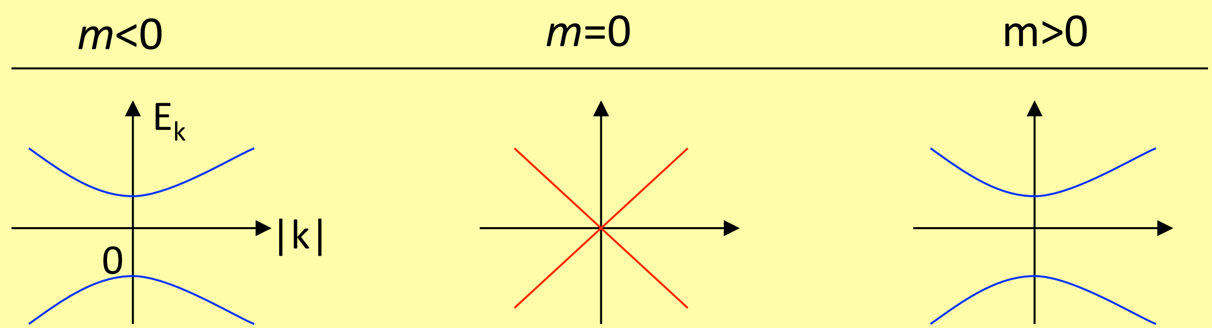
non-compact

$$= \frac{1}{2}\frac{e^2}{2\pi}\frac{m}{|m|}$$

Niemi-Semenoff PRL83
Redlich PRL84
Ishikawa PRL84
Semenoff PRL85
Haldane PRL88
Bernevig etal, Science06…etc



parity anomaly

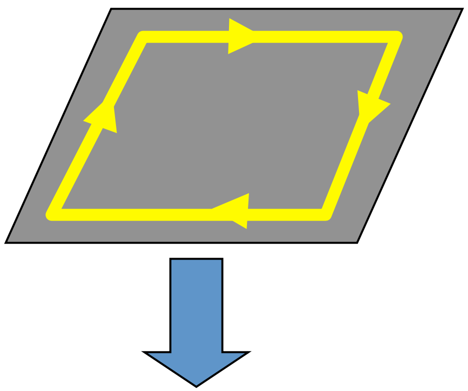


Dirac cone

これまでのまとめ

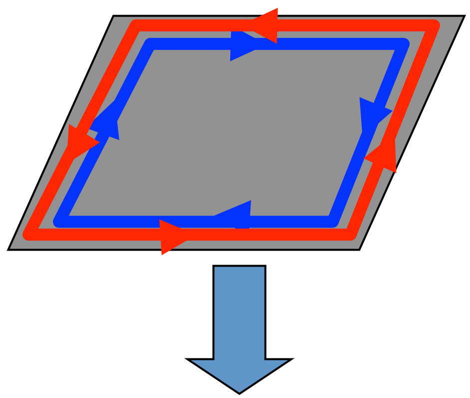
トポロジカル絶縁体

エッジや表面に現われる
ギャップレス状態（特異な金属状態）で
特徴付けられるバンド絶縁体

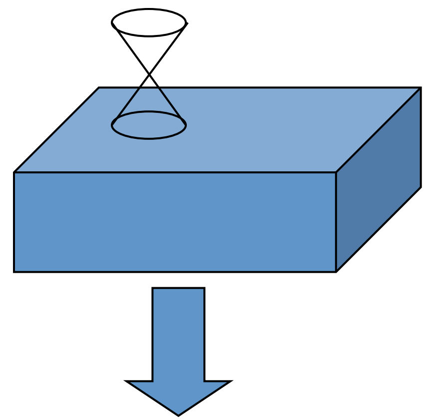


量子ホール効果

時間反転対称の破れ
(チャーン数)



量子スピンホール効果
(但し、スピンが保存する場合)



Dyon
（半整数量子ホール効果）

時間反転対称(Z_2数)

目次

イントロダクション

- "バルク/境界対応"

トポロジカル絶縁体

- 量子ホール絶縁体（ベースとなる系）
- Z_2トポロジカル絶縁体（時間反転対称な系への拡張）
- ３次元への拡張

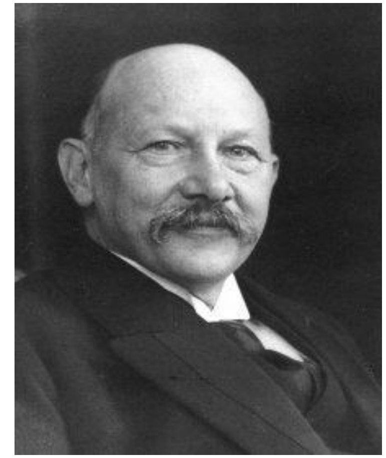
トポロジカル超伝導体（超伝導体へのアナロジー）

- カイラルp-波超伝導
- ヘリカルp-波超伝導
- ３次元への拡張
- マヨラナ状態

ギャップレスの系への拡張

補足ノート（板書予定）
A: ホール伝導度とチャーン数
B: クラマース縮退
C: マヨナラ状態

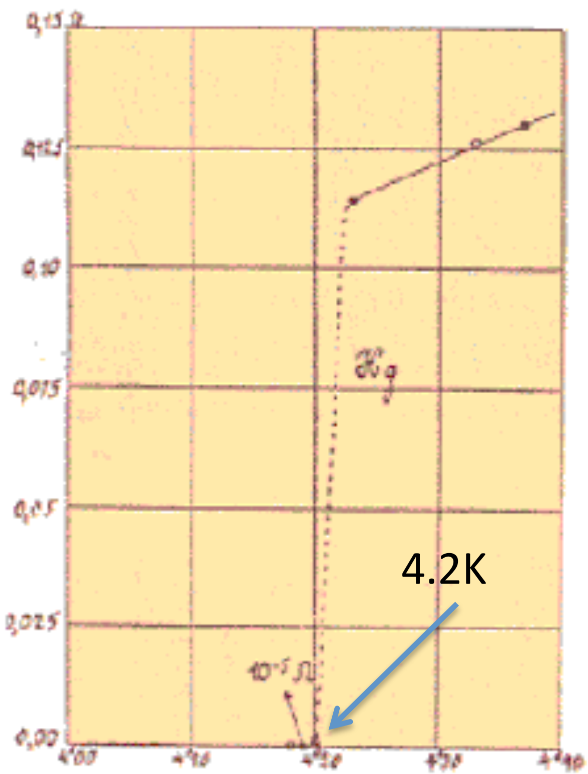
超伝導



1911年　カマリング･オンネスにより発見(水銀)

金属を冷やすと、ある温度以下で電気抵抗がゼロ

ゼロになる温度 ... 超伝導転移温度 T_c　(物質によって異なる)

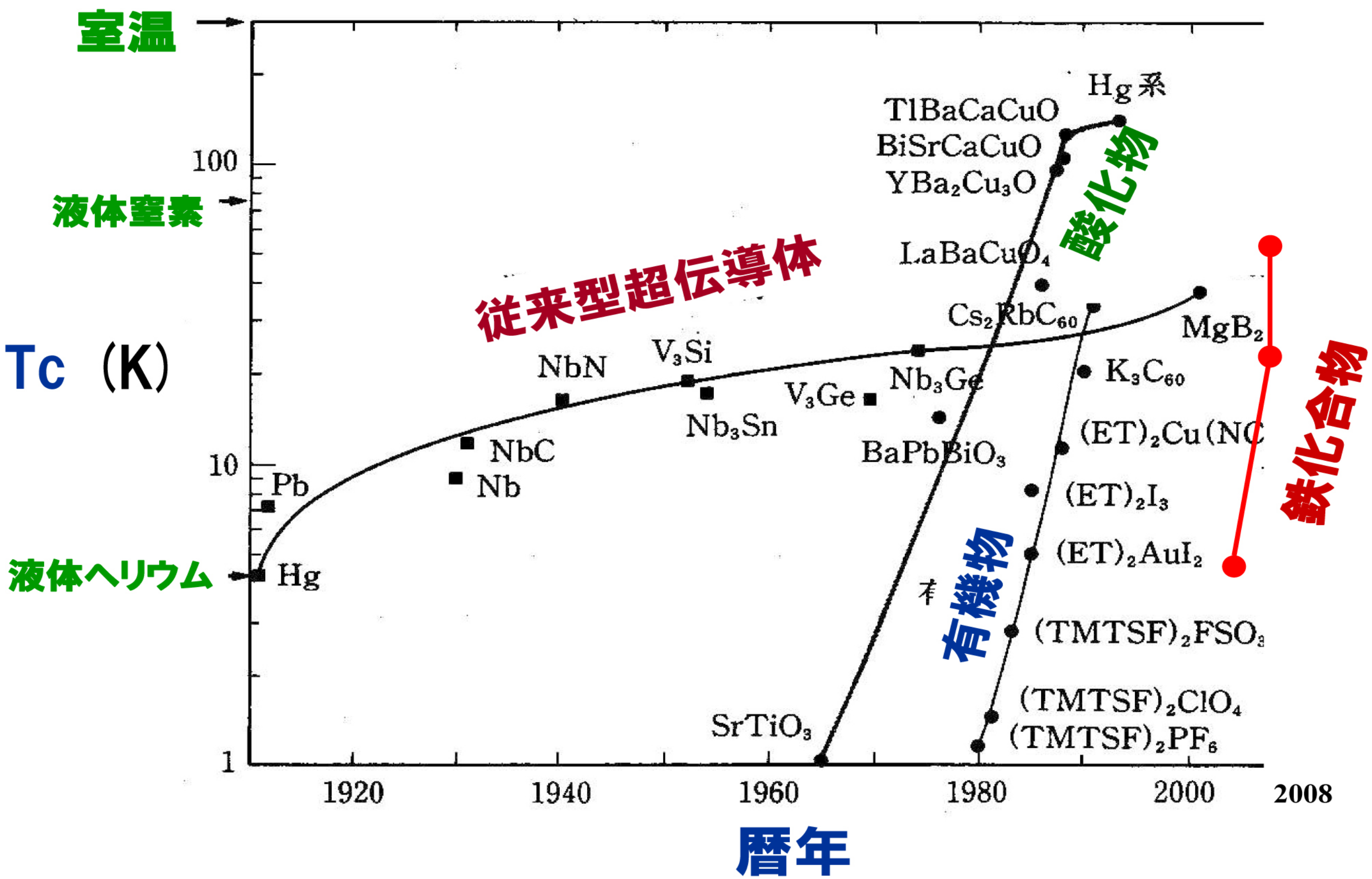


オンネスによる水銀の電気抵抗の温度依存性のデータ。

4．2K以下で抵抗ゼロが実現

発見当初は大きな謎

さまざまな超伝導体と T_c



● H_3S
@190K!!
@200GPa!!!!

2015年現在

青木-黒木　www.s.u-tokyo.ac.jp

○ 液体ヘリウム4の超流動

（超伝導の発見から26年後）

1937年　ピョートル・カピッツア(実験)

2.17K以下で、液体ヘリウム4が抵抗なく流れる

○ ボース凝縮として理解

1938年　フリッツ・ロンドン（理論）

- ヘリウム4原子はボース粒子の一種
- 転移温度以下で、すべての原子が
  いっせいに同じ運動量を持つことが出来る！→ 超流動

○ 超伝導もボース凝縮？？？

そう簡単ではない！！

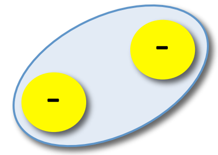
電子はフェルミ粒子(スピン1/2)の一種:

同じ量子状態をとれるのは1個だけ

そのままではボース凝縮できない

○ BCS理論　１９５７年

（発見から46年後）



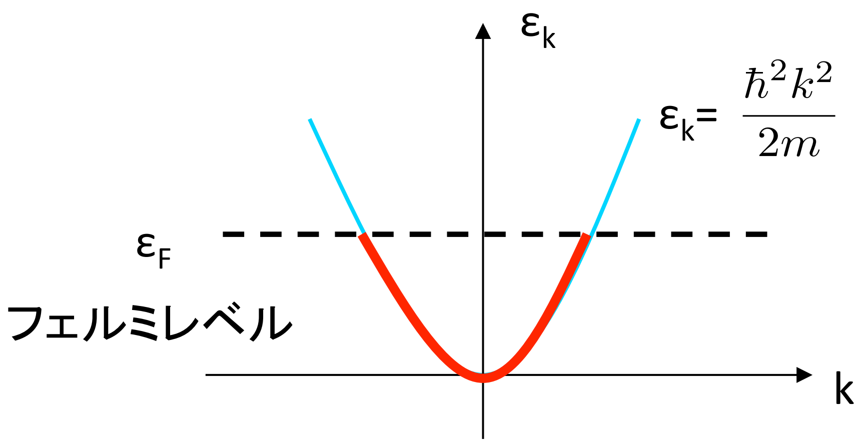
- ２つの電子が*対をなし（クーパー対）*ボース粒子的になり、ボース凝縮を起こす！

- すなわち, 電荷 -2e をもったボース粒子の超流動
  → *超伝導 !!*

- 電子-格子相互作用による引力でペアリング
  （クーロン斥力に打ち勝つ）

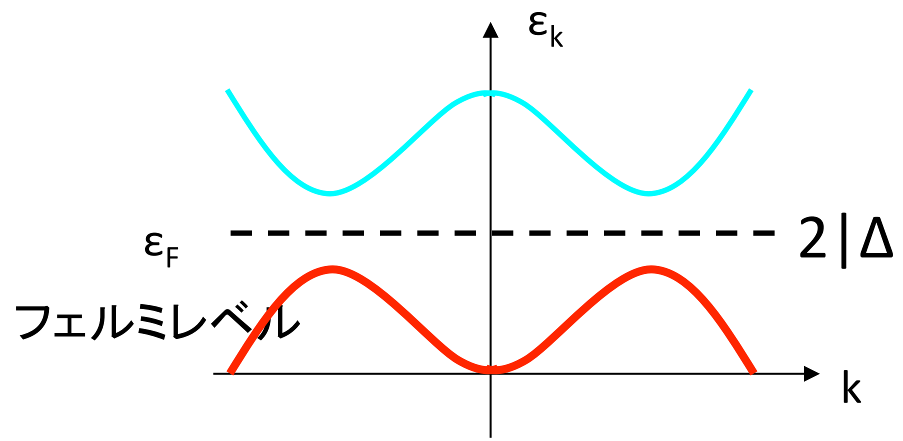
○エネルギー・ギャップの生成

金属状態



赤; 詰まっている状態
青 ; 空いている状態

超伝導状態

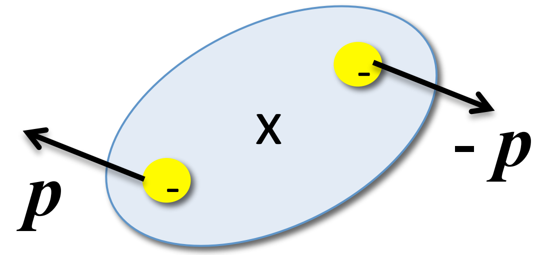


赤; 詰まっている状態
青 ; 空いている状態

絶縁体のようにギャップが開く

トポロジーが使える！？

クーパー対の自由度



- 重心の運動量　　いまは $\boldsymbol{Q}=0$ とする（一様な対凝縮）
- 重心回りの相対軌道角運動量 $\boldsymbol{L}=\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{p}$

（回転対称性を仮定）

- スピン $\boldsymbol{S}$　　2つの電子のスピン ½ と ½ の合成
  ⇒ $|\boldsymbol{S}|=0$（singlet）と $|\boldsymbol{S}|=1$ (triplet) の 2通り
- パウリ排他原理からの制限　　$|\boldsymbol{S}|=0$ ⇨ $|\boldsymbol{L}|=$ 0, 2, 4...

  $|\boldsymbol{S}|=1$ ⇨ $|\boldsymbol{L}|=$ 1, 3, 5...

BCS機構 (電子-格子相互作用)

$$|\boldsymbol{S}|=0,\ |\boldsymbol{L}|=0$$

s-wave

conventional superconductor

トポロジー的に自明

但し, スピン軌道相互作用や磁場の効果があると非自明になり得る

Cf) Sato-Takahashi-Fujimoto, Phys. Rev. Lett. **103**, 020401

非BCS機構 (スピンゆらぎ...etc)

$$|\boldsymbol{S}|=1,\ |\boldsymbol{L}|=1,\ 3,\ \ldots$$

p-, *f*-wave...

$$|\boldsymbol{S}|=0,\ |\boldsymbol{L}|=2,\ 4,\ \ldots$$

d-, *g*-wave...

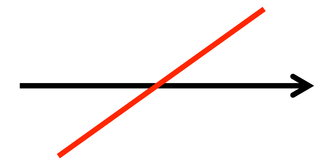
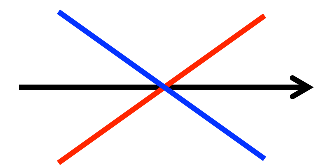
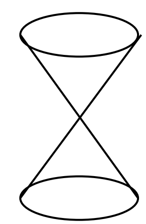
unconventional superconductor

Sigrist&Ueda, Rev.Mod.Phys.(1991)

トポロジー的に非自明な状態があり得る

トポロジカル絶縁体 ⇄ 超伝導体

対応関係

		境界の状態
量子ホール絶縁体	カイラルp-波超伝導	
Z_2 絶縁体（2次元）	ヘリカルp-波超伝導	
Z_2絶縁体（3次元）	3次元 p-波超伝導 （ヘリカルの3次元版）	

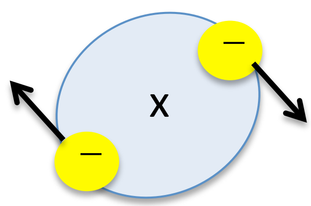
（擬）２次元

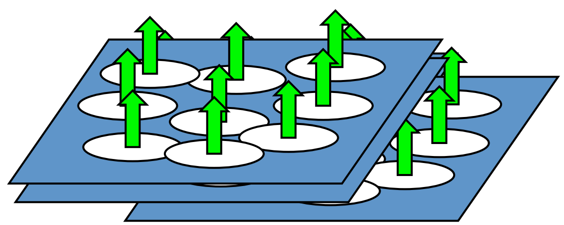
カイラルp-波超伝導

Sr_2RuO_4
Maeno('94); Rice-Sigrist('95)

量子ホール絶縁体のアナロジー

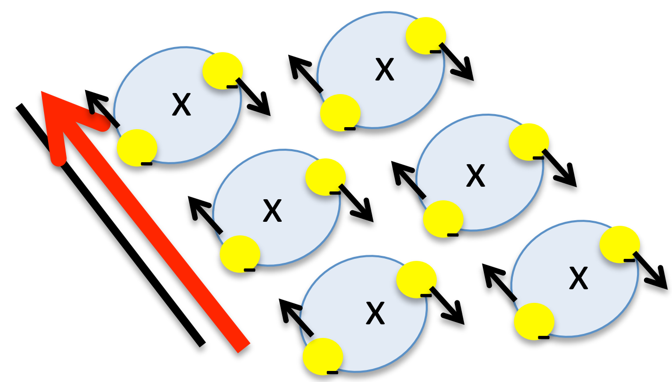
相対軌道角運動量が***強磁性的***
⇒***時間反転対称性の自発的破れ***





Volovik('88)('97),
Haldane & Rezayi('88)
Laughlin('94)('98)
Goryo & Ishikawa('99)
Read & Green('00)
Furusaki&Matsumoto&Sigrist('00)
...etc

カイラル・エッジ状態が
自発的に発生する！！

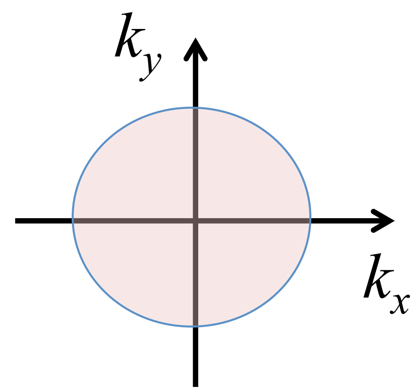


カイラルp-波超伝導体のチャーン数

BdG eq.（超伝導状態の Schroedinger eq.）の解

$$\int_{BZ} \frac{d^2 k}{2\pi i} \boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{k}} \times \langle u_{\boldsymbol{k}} | \boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{k}} | u_{\boldsymbol{k}} \rangle$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \oint_{FS} d\boldsymbol{k} \cdot \Delta^*_{\boldsymbol{k}} \frac{d}{d\boldsymbol{k}} \Delta_{\boldsymbol{k}}$$



フェルミ面のまわりを一周したときに
ギャップ関数の位相が何回回るか

＝±1

カイラル・エッジ状態の本数と
流れの向きを与える

カイラル p-wave $\Delta_{\boldsymbol{k}} = \Delta(k_x \pm i k_y)$
で, particle-like なフェルミ面の場合

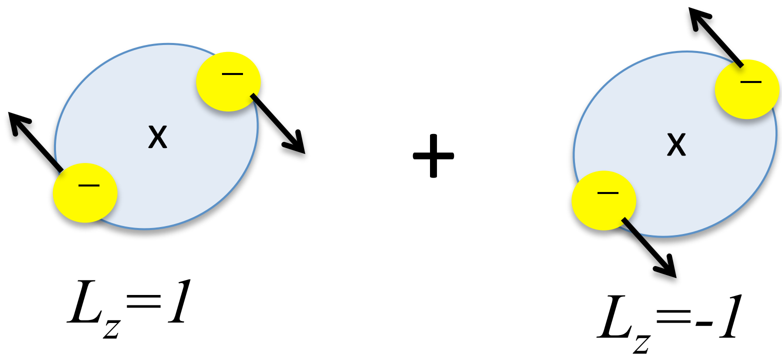
（擬）2次元

ヘリカルp-波超伝導

CePt$_3$Si (?)
Bauer et al('04)

Z$_2$(量子スピン・ホール)絶縁体のアナロジー

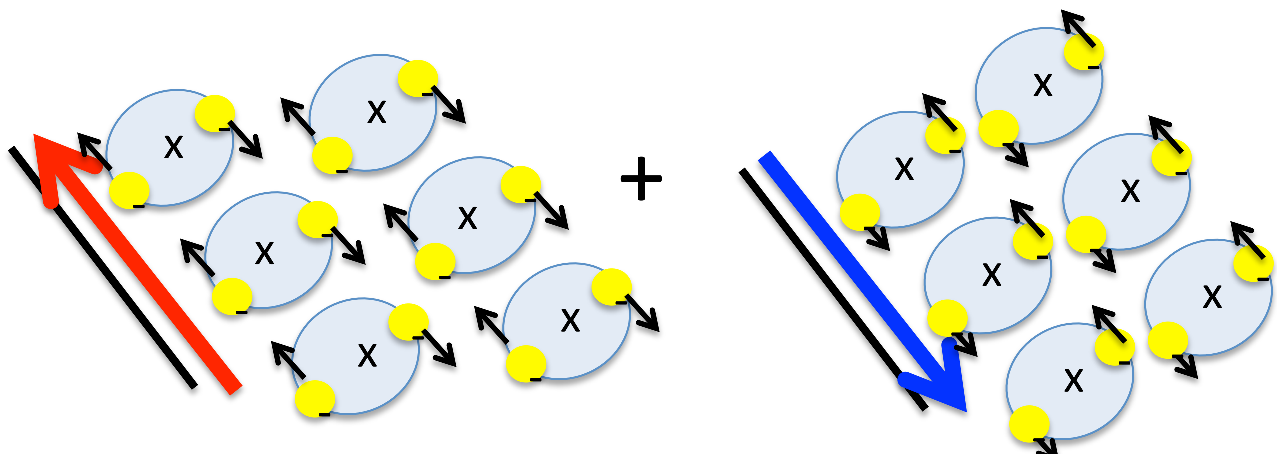
時間反転対称な場合へ拡張



互いに時間反転で
つながり合う状態を
重ね合わせる

ヘリカル・エッジ状態

Qi-Hughes-Raghu-Zhang('08)



ヘリカルp-波超伝導の3次元版

- Schnyder et al の一般的分類表 　Phys. Rev. B **78**, 195125 (2008)

		TRS	PHS	SLS	$d=1$	$d=2$	$d=3$
Standard	A (unitary)	0	0	0	-	$\mathbb{Z}$	-
(Wigner-Dyson)	AI (orthogonal)	+1	0	0	-	-	-
	AII (symplectic)	−1	0	0	-	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$
Chiral	AIII (chiral unitary)	0	0	1	$\mathbb{Z}$	-	$\mathbb{Z}$
(sublattice)	BDI (chiral orthogonal)	+1	+1	1	$\mathbb{Z}$	-	-
	CII (chiral symplectic)	−1	−1	1	$\mathbb{Z}$	-	$\mathbb{Z}_2$
BdG	D	0	+1	0	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}$	-
	C	0	−1	0	-	$\mathbb{Z}$	-
	DIII	−1	+1	1	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}$
	CI	+1	−1	1	-	-	$\mathbb{Z}$

Chiral p

Helical p

結晶の対称性は乱れにより壊されている, としている

超流動 ^{3}He-B相 $|\boldsymbol{J}|=J_z=0,\ (\boldsymbol{J}=\boldsymbol{L}+\boldsymbol{S})$

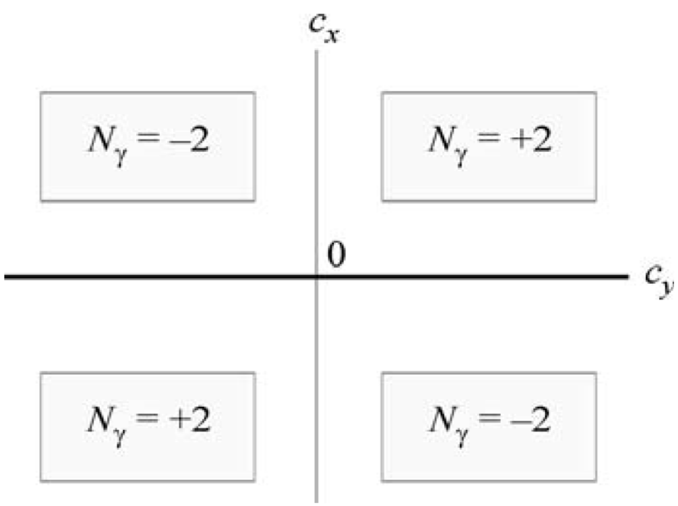
3次元巻き付き数

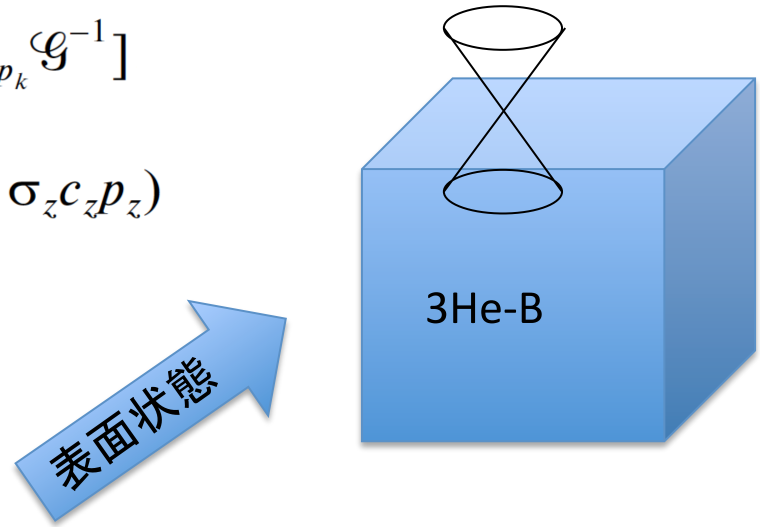
Schnyder et al. PRB ('08)
Volovik, JETP**90**, 587 ('09)

$$N_\gamma = \frac{e_{ijk}}{24\pi^2}\mathbf{tr}\left[\tau_2 \int d^3p\, \mathcal{G}\partial_{p_i}\mathcal{G}^{-1}\mathcal{G}\partial_{p_j}\mathcal{G}^{-1}\mathcal{G}\partial_{p_k}\mathcal{G}^{-1}\right]$$

$$\mathcal{G}^{-1}(\mathbf{p}) = M(p)\tau_3 + \tau_1(\sigma_x c_x p_x + \sigma_y c_y p_y + \sigma_z c_z p_z)$$

$$M(p) = \frac{p^2}{2m^*} - \mu$$





Cf)音響インピーダンス測定

Murakawa.et.al,PRL**103**,155301(2009)

Topo 超伝導の境界ゼロ･エネルギー状態
⇒ マヨラナ･フェルミオン

適当な条件下では

$$\eta^\dagger = \eta$$

生成と消滅演算子が一致
（実演算子）

Read-Green, PRB 2000;
Ivanov, PRL 2001;
Oshikawa et al, Ann.Phys.2007…etc

- カイラルp-波/ヘリカル p-波超伝導体のエッジ状態
- 3次元*p*-波(^{3}He-B型)超伝導のディラック･コーン表面状態
- これらの超伝導体の渦芯の束縛状態

…etc

非アーベル統計渦
⇒ 量子コンピューティング

Nayak-Simon-Stern-Freedman-Das Sarma,
Rev. Mod. Phys. 80, 1083 (2008)

目次

イントロダクション

- “バルク/境界対応”

トポロジカル絶縁体

- 量子ホール絶縁体（ベースとなる系）
- Z_2トポロジカル絶縁体（時間反転対称な系への拡張）
- ３次元への拡張

トポロジカル超伝導体（超伝導体へのアナロジー）

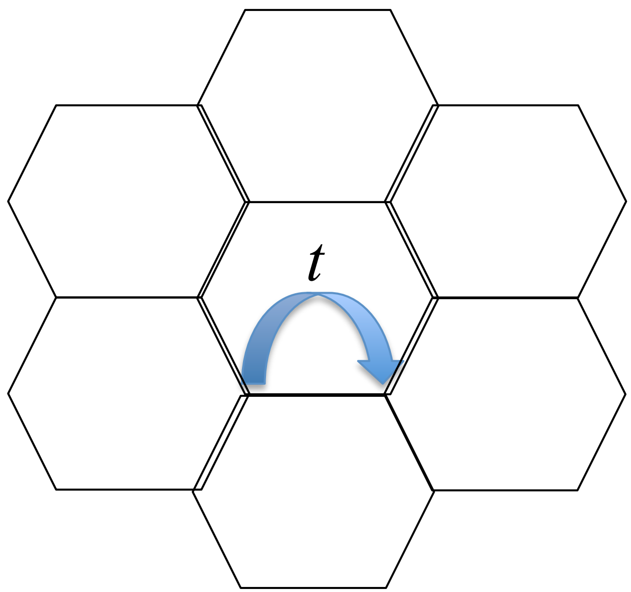
- カイラルp-波超伝導
- ヘリカルp-波超伝導
- ３次元への拡張
- マヨラナ状態

ギャップレスの系への拡張

ギャップレスの系とトポロジー

- グラフェンのフラット・バンド
- d-波超伝導体のアンドレーエフ束縛状態
- ワイル半金属
- 超伝導体のワイル励起

グラフェン Novoselov-Geim



- カーボンがつくる蜂の巣状の単層シート

- 電子状態 ...
  隣り合う格子点上を電子がホップして行く
  タイト・バインディング模型

- シュレーディンガー方程式

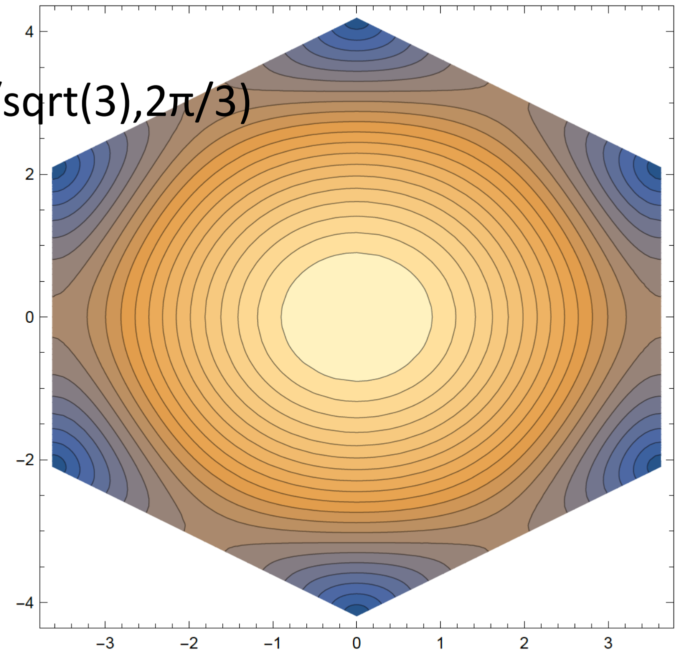
$$\sum_{n=1,2,3} t(c_{\boldsymbol{r}_i+\boldsymbol{\delta}_n^{(i)}s} + c_{\boldsymbol{r}_i-\boldsymbol{\delta}_n^{(i)}s}) = Ec_{\boldsymbol{r}_is}$$

フーリエ変換 ⇒ エネルギー固有値 E, 固有状態 |E>

グラフェンのエネルギー・スペクトル

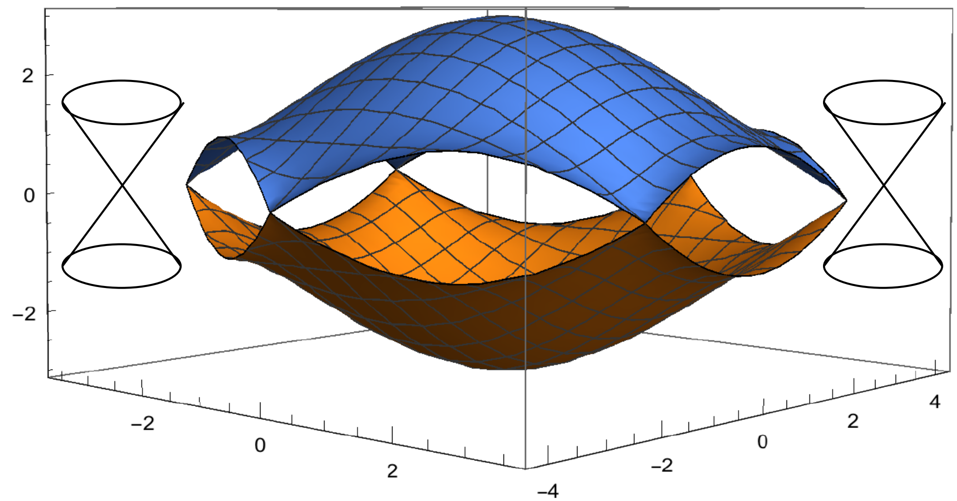
K (0,4π/3)

K’ (-2π/sqrt(3),2π/3)



ブリルアン・ゾーンと
スペクトルの等高線（μ=0）

ディラック・コーンが２個



スペクトルの３次元図（μ=0）

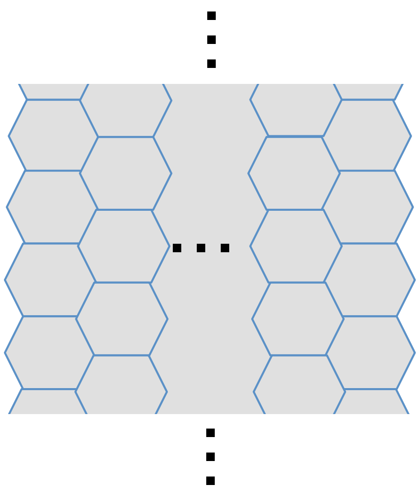
ギャップが閉じている

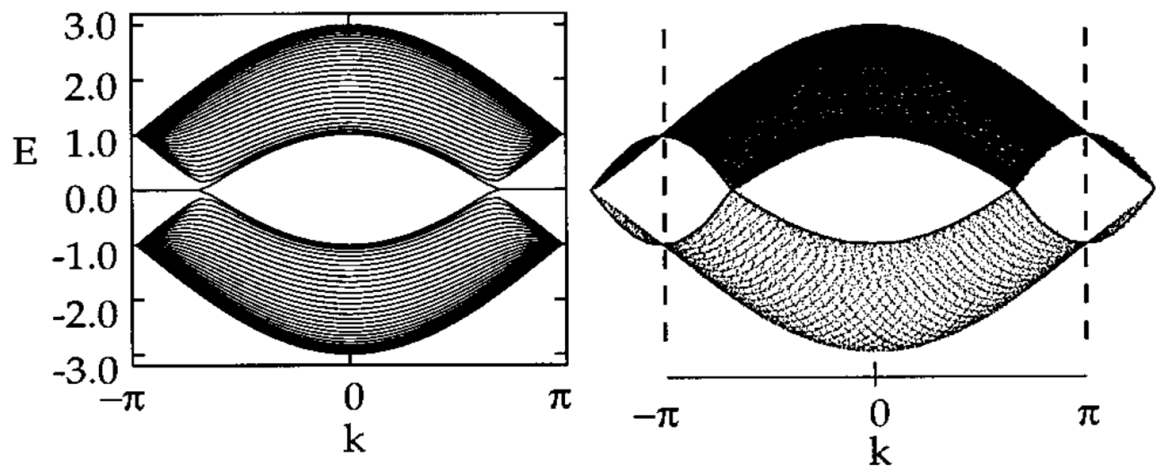
（ゼロギャップ半導体）

グラフェンのエッジ状態

Fujita, Wakabayashi, Nakata, Kusakabe, JPSJ **65**, 1920 (1996)
Nakata, Fujita, Dresselhaus, Dresselhaus, PRB **54**, 17954 (1996)

Zigzag edge

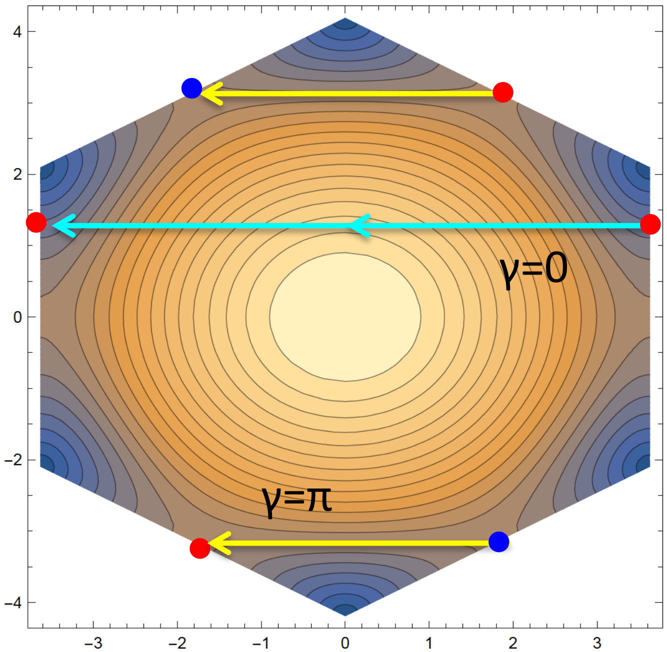




Zigzag ribbon のスペクトル
フラット・バンド状態は
エッジに局在している

トポロジーとの関係？…*Yes!!*

Ryu-Hatsugai PRL (2002)



- k_y を固定した閉経路を考える
- この経路に沿った1次元巻き付き数（Berry 位相）

$$\gamma(k_y) \quad = \quad \oint dk_x \left\langle u_{\boldsymbol{k}} \middle| i \frac{\partial}{\partial k_x} \middle| u_{\boldsymbol{k}} \right\rangle$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{エッジ状態が出ない } k_y \\ \pi & \text{エッジ状態が出てる } k_y \end{cases}$$

グラフェンとの
アナロジー

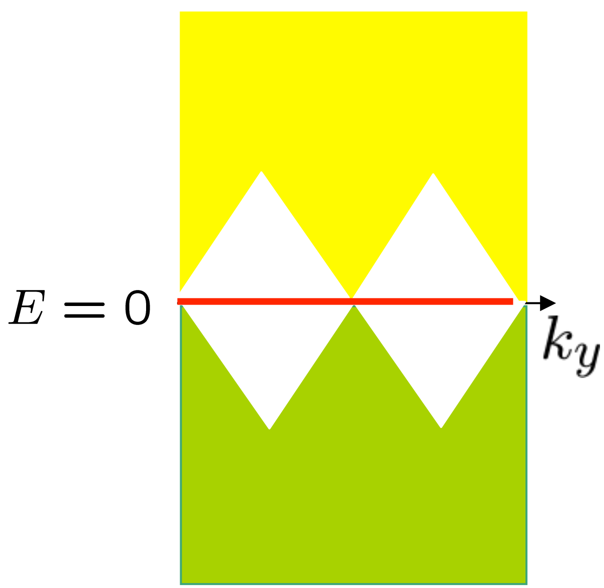
d-波超伝導体の
アンドレーエフ束縛状態

$$\Delta_{\boldsymbol{k}} = \Delta k_x k_y$$

$k_x=0,\ k_y=0$ でライン・ノード
（励起ギャップ閉）

（正方格子系とする）

- [100]面にゼロ・エネルギー状態

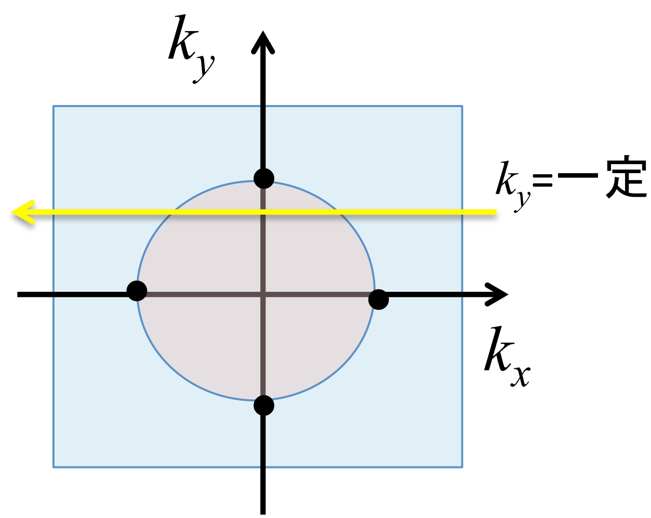


田仲由喜夫氏のslideより
Moskow Int. Conf. (’11)

Hu(’94),Tanaka-Kashiwaya(’95)

- １次元巻き付き数で判定

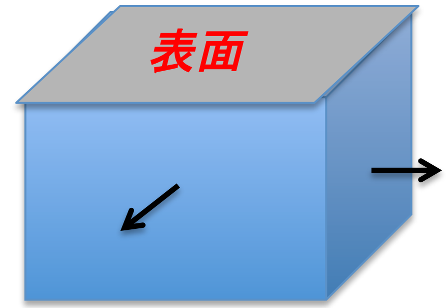
M.Sato et al PRB(2011)



ワイル半金属

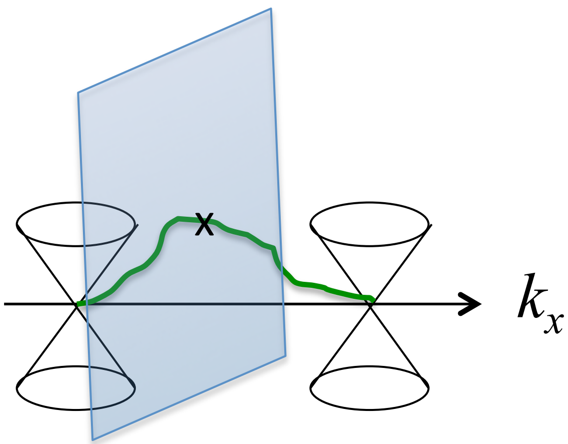
Nielsen-Ninomiya, Nucl.Phys **B185** 20 (1981); **B193** 173 (1981);Phys. Lett. **B130** 389 (1983)

３次元系バルクのエネルギー･スペクトルに
コーン構造（Weyl cone）* i.e. グラフェンの*3d*版



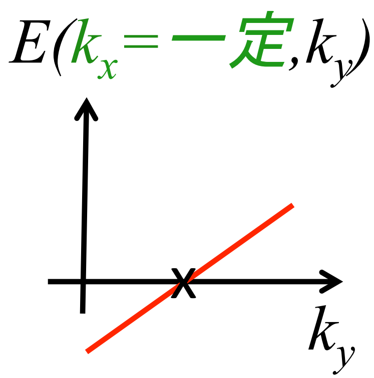
z方向に開いた系

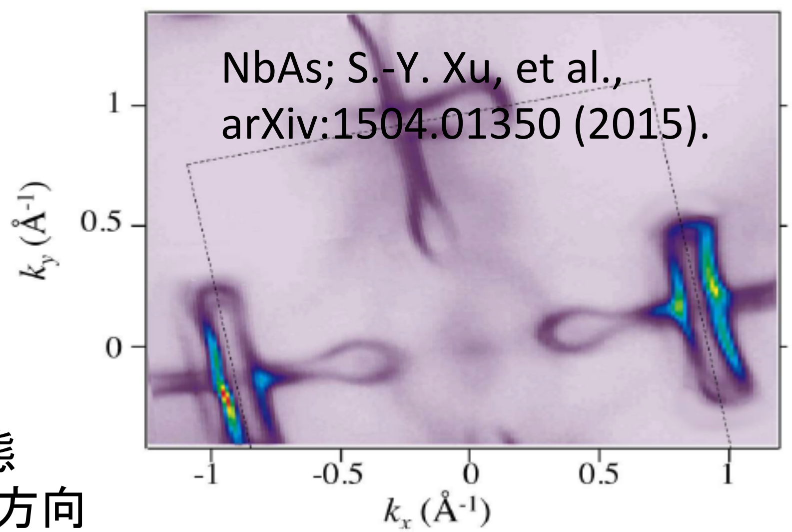
“チャーン渦糸”



k_x=一定の面

“フェルミ･アーク”





- 表面にカイラル状態
- フェルミ点（x）が k_x 方向に連なり, ***フェルミ･アーク***

*縮重度が半分の Dirac cone

ワイル半金属

Nielsen-Ninomiya, Nucl.Phys **B185** 20 (1981); **B193** 173 (1981);Phys. Lett. **B130** 389 (1983)

３次元系バルクのエネルギー･スペクトルに
コーン構造（Weyl cone）* i.e. グラフェンの*3d*版

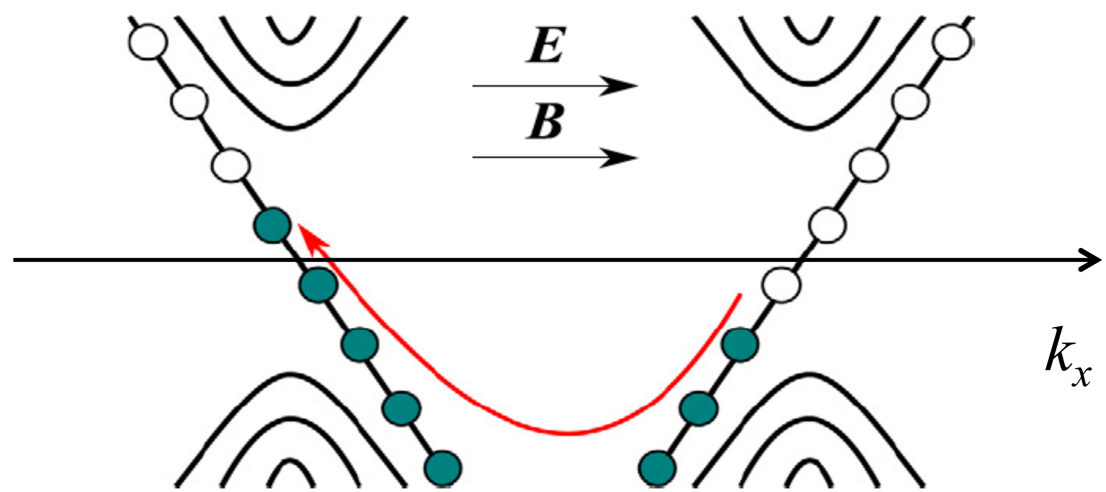
負の磁気抵抗

- 磁場増やしても
  ゼロ･エネルギー状態が
  必ず残る

- 縮退度は磁場に比例(ふつうのLLと同じ)

- ∴磁場増 ⇒ 抵抗減

P. Hosur, X. Qi / C. R. Physique 14 (2013) 857–870

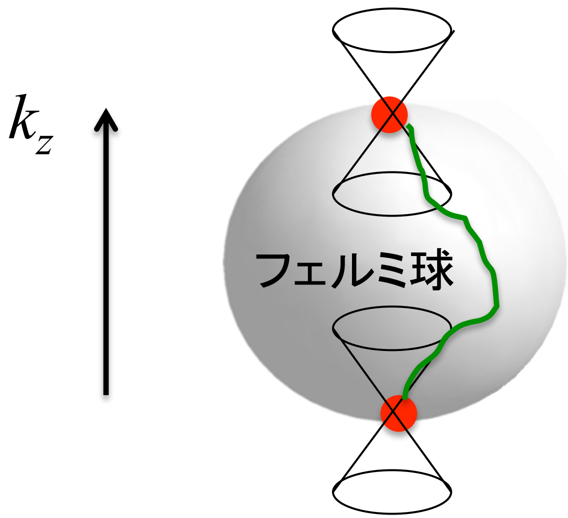


*縮重度が半分の Dirac cone

超伝導体のポイント・ノードと Weyl 励起

例) ３次元系のカイラルp-波
(超流動^{3}He-A相)

G.E. Volovik, The universe in a ^{3}He droplet



$$\Delta_{\boldsymbol{k}} = \Delta(k_x \pm i k_y)$$

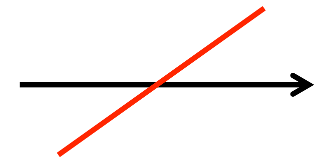
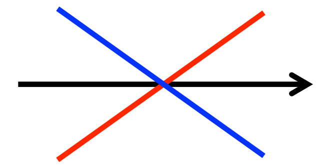
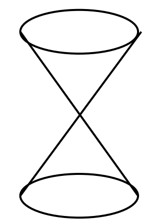
- ポイント・ノードがふたつ
（Weyl cone）

- チャーン渦 ⇒ フェルミ・アーク

トポロジカル絶縁体 ⇄ 超伝導体

対応関係

ギャップあり

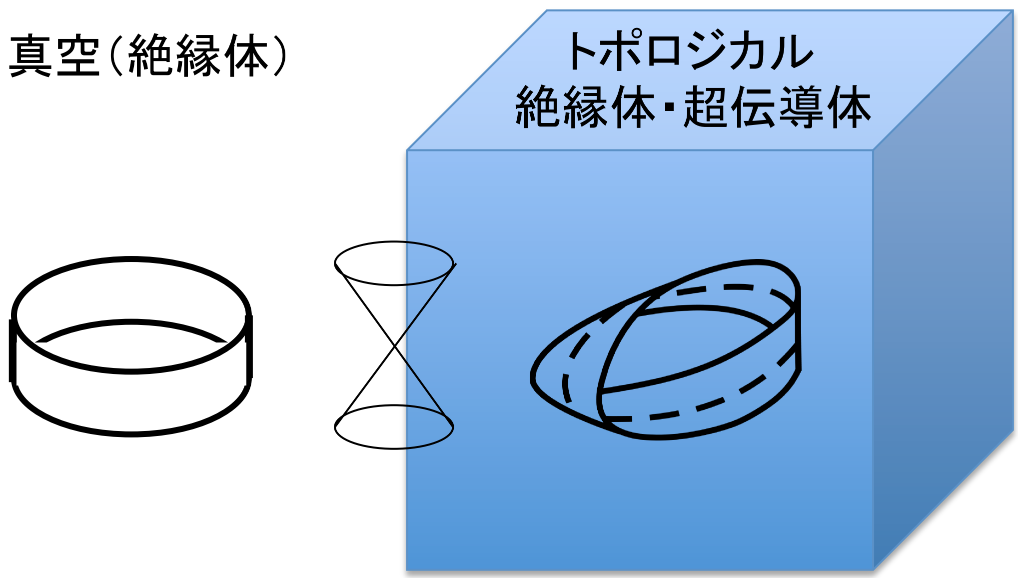
量子ホール絶縁体	カイラルp-波超伝導	
Z_2 絶縁体（２次元）	ヘリカルp-波超伝導	
Z_2絶縁体（３次元）	３次元 p-波超伝導 （ヘリカルの3次元版）	

ギャップなし

グラフェン	ライン・ノードの超伝導 （d-wave…etc）
ワイル半金属	ポイント・ノードの超伝導 (3次元p+ip,d+id…etc)

トポロジカル絶縁体・超伝導体

- バルクの状態のトポロジーにより,系の境界にギャップレス状態が出現
（バルク/境界対応）



あまり強調しませんでしたが…

すべての背後に
Dirac (Weyl) 粒子の存在あり！

相対論的分散を持つマルチ・バンド系

$$E_{\boldsymbol{k}} = \pm v_F |\boldsymbol{k}|$$ あるいは $$\pm\sqrt{v_F^2|\boldsymbol{k}|^2 + m^2}$$

長波長・低エネルギー励起 ($k\cdot p$ 近似)

があらわれたらトポロジーとの関連を探るべし

その他

Teo-Fu-Kane PRB('08)

対称性に保護されたトポロジー

Schnyder et al. の分類表(前述)

		TRS	PHS	SLS	$d=1$	$d=2$	$d=3$
Standard	A (unitary)	0	0	0	-	$\mathbb{Z}$	-
(Wigner-Dyson)	AI (orthogonal)	+1	0	0	-	-	-
	AII (symplectic)	−1	0	0	-	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$
Chiral	AIII (chiral unitary)	0	0	1	$\mathbb{Z}$	-	$\mathbb{Z}$
(sublattice)	BDI (chiral orthogonal)	+1	+1	1	$\mathbb{Z}$	-	-
	CII (chiral symplectic)	−1	−1	1	$\mathbb{Z}$	-	$\mathbb{Z}_2$
BdG	D	0	+1	0	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}$	-
	C	0	−1	0	-	$\mathbb{Z}$	-
	DIII	−1	+1	1	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}$
	CI	+1	−1	1	-	-	$\mathbb{Z}$

- ここでは, 結晶の対称性はなにも仮定していなかった(乱れで壊れているとしていた)
- 結晶の対称性を考慮することにより, 新たなトポロジカル不変量を導入出来る